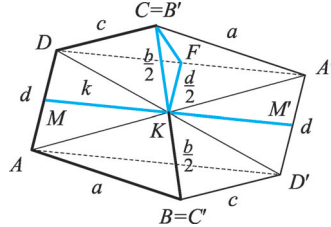
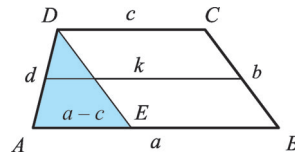


402/I.



402/II.

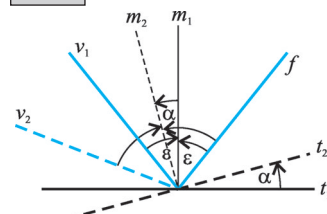


- 400.** Tükrözzük a trapéz a  $BC$  szár felezőpontjára  $\Rightarrow AD'A'D$  paralelogramma.  
 a) A szerkesztés: ①  $a + c, m, d \Rightarrow AD'A'\Delta$ . ②  $AA'$  felezőpontja  $\Rightarrow F$ ;  $F$  középpontú,  $b/2$  sugarú kör  $\Rightarrow k$ . ③  $k \cap AD' = \{B_1; B_2\}$ . ④  $B_i$  tükörképe  $F$  pontra  $\Rightarrow C_i$ ;  $D'$  tükörképe  $F$  pontra  $\Rightarrow D$ . A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.  
 b) A szerkesztés: ①  $a + c, m, \alpha \Rightarrow AD'A'D$  paralelogramma. ②  $AA'$  felezőpontján,  $F$  ponton át  $AD'$ -vel párhuzamos egyenes  $\Rightarrow p$ . ③  $F$  pontból a  $p$  középpárhuzamosra  $\beta$  szöget mérünk  $\Rightarrow g$  egyenes. ④  $g \cap AD' = B$ ;  $g \cap DA' = C$ . Egy megoldás van.  
 c) A szerkesztés: ①  $a + c, e, f \Rightarrow AD'C\Delta$ . ②  $C$  ponton át  $AD'$ -vel párhuzamos  $\Rightarrow g$  egyenes;  $C$  középpontú  $b$  sugarú kör  $\Rightarrow k$ . ③  $k \cap AD' = \{B_1; B_2\}$ . ④  $C$  pontból  $g$  egyenesen  $D'B_i$  távolság  $\Rightarrow \{D_1; D_2\}$ . A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.  
**401.**  $D$  pontot tükrözzük a  $BC$  szár felezőpontjára  $\Rightarrow BD'CD$  paralelogramma. Kétféle trapéz szerkeszthetünk aszerint, hogy a  $\varphi$  szögű szögtartomány az alapot vagy a szárát tartalmazza-e.  
 a) Két egymástól független szerkesztést végzünk. ①  $e, f, \varphi \Rightarrow AD'C\Delta$  és  $e, f, 180^\circ - \varphi \Rightarrow AD'C\Delta$ . ②  $A$  középpontú  $a$  sugarú kör  $\Rightarrow k$ ,  $B$  középpontú  $f$  sugarú kör  $\Rightarrow l$ . ③  $AB$ -vel párhuzamos  $C$ -n át  $\Rightarrow t$ . ④  $k \cap AD' = B$ ,  $l \cap t = D$ . 2, 1 vagy 0 megoldás van.  
 b) Két egymástól független szerkesztést végzünk. ①  $e, f, \varphi \Rightarrow AD'C\Delta$  és  $e, f, 180^\circ - \varphi \Rightarrow AD'C\Delta$ , az alapok összege  $AD' = a + c$ . ②  $[(a + c) + (a - c)] : 2 = a$  és  $[(a + c) - (a - c)] : 2 = c$ . ③  $A$  középpontú  $a$  sugarú kör  $\Rightarrow k$ ,  $C$  középpontú  $c$  sugarú kör  $\Rightarrow l$ . ④  $AD'$ -vel párhuzamos  $C$ -n át  $\Rightarrow t$ . ⑤  $k \cap AD' = B$ ,  $l \cap t = D$ . 2, 1 vagy 0 megoldás van.  
**402.** Tükrözzük az  $ABCD$  négyszöget a  $BC$  oldal  $K$  felezőpontjára  $\Rightarrow AD'A'D$  négyszög paralelogramma, aminek az  $MM'$  szakasz a középvonala  $\Rightarrow DA' = 2k$ .  
**1. eset:**  $2k, a, c$  szakaszokra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.  
 A szerkesztés: ①  $2k, a, c \Rightarrow DA'C$ . ②  $DA'$  felezőpontja  $F$ . ③  $CF, b/2, d/2 \Rightarrow FCK_1\Delta$  és  $FCK_2\Delta$ . ④  $C$  pont tükörképe  $K_i$  pontra  $\Rightarrow B_i$ ,  $A'$  pont tükörképe  $K$  pontra  $A_i$ . 2, 1 vagy 0 megoldás lehet.  
**2. eset:**  $a + c = 2k$ . A szerkesztés: ①  $a - c, b, d \Rightarrow AED\Delta$ . ②  $D$  ponton át  $AE$ -vel párhuzamos egyenes  $\Rightarrow e$ ,  $D$  középpontú  $c$  sugarú kör  $\Rightarrow l$ . ③  $l \cap e = C$ ,  $C$  középpontú  $b$  sugarú kör  $\Rightarrow t$ . ④  $t \cap AE = B$ . A megoldások száma 0 vagy 1.  
**3. eset:**  $a + c \neq 2k$  és  $a, c, 2k$  szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség  $\Rightarrow$  nincs megoldás.

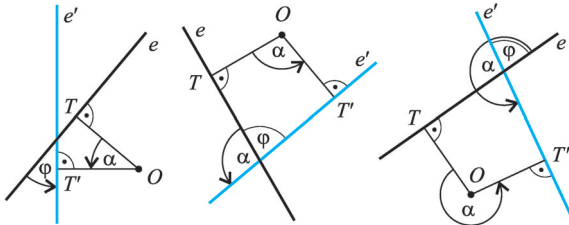
Pont körüli forgatás

- 403.**  $AC \parallel BC'$  miatt  $CAB \sphericalangle$  és  $C'BA \sphericalangle$  társszögek:  $39^\circ + 98^\circ + \varphi = 180^\circ \Rightarrow \varphi = 43^\circ$ .  $43^\circ$ -kal negatív irányban kell elforgatni  $B$  körül a  $BC$  oldalt.  
**404.** Az ábra jelöléseit használjuk. A visszaverődés törvénye szerint:  $\sphericalangle(f; m_1) = \sphericalangle(m_1; v_1) = \varepsilon$  és  $\sphericalangle(f; m_2) = \sphericalangle(m_2; v_2) = \varepsilon + \alpha$ . Az ábráról leolvasható:  $\sphericalangle(v_1; m_2) = \varepsilon - \alpha$ ;  $\sphericalangle(v_2; v_1) = \sphericalangle(v_2; m_2) - \sphericalangle(v_1; m_2) = \varepsilon + \alpha - (\varepsilon - \alpha) = 2\alpha$ .  
 A **405.** és **406.** feladat megoldását az olvasóra bízuk.

404.



**409.**



=  $P'$  a megoldás. b) ①  $O$  középpontú  $OP$  sugarú kör  $\rightarrow k$ . ②  $k \cap e = P'$ ,  $P'OP \sphericalangle = \alpha$ . ③  $Q$  pontot  $O$  körül  $\alpha$  szöggel elforgatva  $\rightarrow Q'$  pont. ④  $P'Q'$  egyenes  $\rightarrow e'$  a megoldás. Az a) és b) részben a megoldások száma kettő, ha  $d(O; e) < d(O; P)$ ; egy, ha  $d(O; e) = d(O; P)$ ; nulla, ha  $d(O; e) > d(O; P)$ .

**409.** Legyen a  $T$  pont az  $O$  középpont merőleges vetülete az adott  $e$  egyenesen; az  $e$  egyenes  $O$  pont körül  $\alpha$  szöggel elforgatott képe  $e'$ ;  $e$  és  $e'$  egyenes hajlásszöge  $\varphi$ ! Ekkor  $T' \in e'$ ; és  $OT \perp e$  miatt  $OT' \perp e' \Rightarrow \angle OTT' = \alpha$ ; és  $e, e'$  irányított szöge  $\alpha$ .

1. eset:  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \Rightarrow \varphi = \alpha$ .

2. eset:  $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ \Rightarrow \varphi = 180^\circ - \alpha$ .

3. eset:  $180^\circ < \alpha \leq 270^\circ$  esetén  $\varphi = \alpha - 180^\circ$  és  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$  esetén  $\varphi = 360^\circ - \alpha$ .

**410.** a) Legyenek az  $e$  és  $f$  egyenesek által bezárt szögek  $\alpha$  és  $180^\circ - \alpha$ . Szerkesztés: ①  $P$  pontból  $e$ -re állított merőleges egyenes talppontja  $\rightarrow T$ . ②  $T$  pontot elforgatjuk  $P$  körül  $\alpha$ , illetve  $180^\circ - \alpha$  szöggel  $\rightarrow T'_1$  és  $T'_2$ . ③  $P$ -ben merőlegest állítunk  $PT'_1$ -re, illetve  $PT'_2$ -re  $\rightarrow e'$  és  $e''$  egyenes a megoldás. Egy megoldás van, ha  $P$  rajta van az  $e$  egyenesen vagy az  $e$  és  $f$  egyenes szögfelezőjén, két megoldás van egyébként.

b) Szerkesztés: ① tetszőleges  $f$ -re merőleges egyenes  $\rightarrow g$ . ② Az  $e$  egyenest az a) részben leírtak szerint  $P$  pont körül elforgatjuk úgy, hogy  $g$ -vel párhuzamos legyen. Egy megoldás van, ha  $P$  rajta van az  $e$  egyenesen, két megoldás van egyébként.

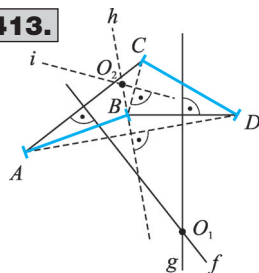
**411.** Az  $AB$  szakasz felező merőlegesének bármely pontja megoldás.

**412.** Legyen a középpont  $O$ , egy megfelelő pontpár  $P$  és  $P'$ . A pont körüli forgatás definíciója szerint  $OP = OP' \Rightarrow PP'$  szakasz felezőmerőlegese átmegy az  $O$  ponton. Hasonlóan igazolható az állítás a két alakzat bármely megfelelő pontpárjára.

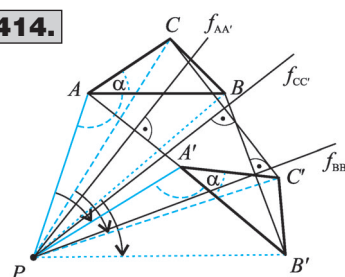
**413.** Szerkesztés: ①  $AC$  szakasz felezőmerőlegese  $\rightarrow f$ ,  $BD$  szakasz felezőmerőlegese  $\rightarrow g \Rightarrow f \cap g = O_1$  ②  $AD$  szakasz felezőmerőlegese  $\rightarrow h$ ,  $BC$  szakasz felezőmerőlegese  $\rightarrow i \Rightarrow h \cap i = O_2$ . ③ Az  $O_i$  pont akkor megoldás, ha az egymásnak megfeleltetett pontokat egyező irányú és nagyságú elforgatás viszi egymásba. A megoldások száma 2 vagy 1.

**414.** Legyen a  $P$  pont az  $AA'$  és  $BB'$  felezőmerőlegeseinek metszéspontja!  $PA = PA', PB = PB', AB = A'B' \Rightarrow PAB\Delta \cong PA'B'\Delta \Rightarrow \angle PAB = \angle PA'B', PA = PA', \angle PAC = \angle PA'C', AC = A'C' \Rightarrow \angle PAC\Delta \cong PA'C'\Delta \Rightarrow PC = PC' \Rightarrow P$  pont rajta van a  $CC'$  szakasz felezőmerőlegesén is  $\Rightarrow$  a három felezőmerőleges egy ponton megy át.

**413.**



**414.**



**407.** a) A szerkesztés: ① tetszőleges  $P \in e$ ,  $P$  pont  $O$  körül  $\alpha$  szöggel elforgatott képe  $\rightarrow P'$  pont.

②  $P'O$  egyenes  $\rightarrow e'$ .

b) Szerkesztés: ① tetszőleges  $P, Q \in e$ ;  $P$  és  $Q$  pont  $O$  körül  $\alpha$  szöggel elforgatott képe  $\rightarrow P'$  és  $Q'$  pont. ②  $P'Q'$  egyenes  $\rightarrow e'$ .

**408.** Adott az  $e$  egyenes, az  $O$  középpont és a  $P$  pont. Szerkesztés: a) ①  $O$  középpontú  $OP$  sugarú kör  $\rightarrow k$ . ②  $k \cap e = P'$ ,  $P'OP \sphericalangle = \alpha$ . ③  $Q$  pontot  $O$  körül  $\alpha$  szöggel elforgatva  $\rightarrow Q'$  pont. ④  $P'Q'$  egyenes  $\rightarrow e'$  a megoldás. Az a) és b) részben a megoldások száma kettő, ha  $d(O; e) < d(O; P)$ ; egy, ha  $d(O; e) = d(O; P)$ ; nulla, ha  $d(O; e) > d(O; P)$ .

**415.** A 414. feladatban láttuk, hogy  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  felező merőlegese egy ponton megy át. Ez a pont a forgatás középpontja, mert  $APA' \sphericalangle = BPB' \sphericalangle = CPC' \sphericalangle$ , és azonos irányú az elforgatás szöge. Egyértelmű a megoldás, mivel a feltételek miatt  $f_{AA'}$ ,  $f_{BB'}$ ,  $f_{CC'}$  nem párhuzamosak.

**416.** A forgatás során a körüljárási irány nem változik  $\Rightarrow ABC$  háromszög elforgatottjának megfelelő csúcsai  $DEF$ ,  $EFD$ ,  $FDE$  lehetnek.

Szerkesztés: ①  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  szakaszok felezőmerőlegesei  $\rightarrow f, g, h \Rightarrow f \cap g \cap h = O_1$ . ②  $AE$ ,  $BF$ ,  $CD$  szakaszok felezőmerőlegesei  $\rightarrow i, j, k \Rightarrow i \cap j \cap k = O_2$ . ③  $AF$ ,  $BD$ ,  $CE$  szakaszok felezőmerőlegesei  $\rightarrow l, m, n \Rightarrow l \cap m \cap n = O_3$ . ④ Az  $O_i$  pont akkor megoldás, ha az egymásnak megfelelő pontokat egyező irányú és nagyságú elforgatás viszi egymásba. 3, 2 vagy 1 megoldás lehet.

**417.** Az adott téglalapok  $ABCD \cong EFGH$ .  $ABCD$  elforgatottjának megfelelő csúcsai  $EFGH$  vagy  $GHEF$  lehetnek a körüljárási irány szerint. Szerkesztés: ①  $AE$  szakasz felezőmerőlegese:  $e$ ,  $BF$  szakasz felezőmerőlegese:  $f$ . ②  $e \cap f = O_1$ . ③  $AG$  szakasz felezőmerőlegese:  $g$ ,  $BH$  szakasz felezőmerőlegese:  $h$ . ④  $g \cap h = O_2$ . ⑤ Az  $O_i$  pont akkor megoldás, ha az egymásnak megfelelő pontokat egyező irányú és nagyságú elforgatás viszi egymásba. A megoldások száma 2 vagy 1.

**418.** Szerkesztés: ①  $AA'$  szakasz felezőmerőlegese:  $e$ . ②  $BB'$  szakasz felezőmerőlegese:  $f$ . ③  $e \cap f = T$ . Mivel  $T$  az  $ABCD$  téglalap belső pontja, megfelel a forgatás középpontjának. Egy megoldás van.

**419.** A forgatás középpontja az átlók metszéspontja, szögének nagysága  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $360^\circ$ -os lehet, iránya tetszőleges.

**420.** A forgatás középpontja a háromszög köré írt körének középpontja, szögének nagysága  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $360^\circ$ -os lehet, iránya tetszőleges.

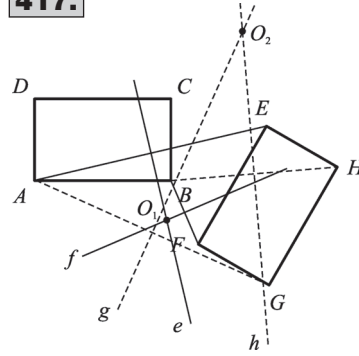
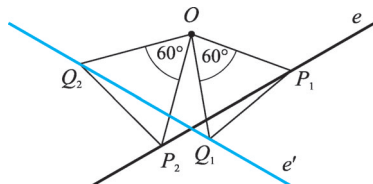
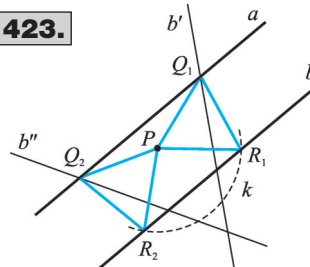
**421. a)** ①  $C' \equiv B$ . ② tetszőleges  $D$  pont:  $D \in e$ ,  $D \neq C$ .  $D$  pontot  $A$  körül elforgatjuk  $CAB \sphericalangle$ -gel  $\rightarrow D'$ . ③  $D'B$  egyenes  $\rightarrow e'$ .

**b)** ①  $C'' \equiv A$ . ② tetszőleges  $D$  pont:  $D \in e$ ,  $D \neq C$ .  $D$  pontot  $O$  körül elforgatjuk  $COA \sphericalangle$ -gel  $\rightarrow D''$ . ③  $D''A$  egyenes  $\rightarrow e''$ .

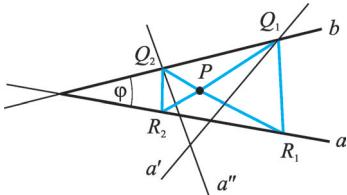
**422.** Az  $e$  egyenes tetszőleges  $P$  pontjára  $PO = OQ$  és  $POQ \sphericalangle = 60^\circ$ , ezért  $Q$  pont a  $P$ -nek  $O$  pont körül  $60^\circ$ -kal elforgatott képe.  $A$   $Q$  pontok halmaza az  $e$  egyenes  $O$  pont körüli  $60^\circ$ -os elforgatottja.

**423.** Szerkesztés: ①  $b$  egyenes elforgatása  $P$  pont körül  $+60^\circ$ -kal és  $-60^\circ$ -kal:  $b'$ ,  $b''$ . ②  $b' \cap a = Q_1$ ,  $b'' \cap a = Q_2$ . ③  $P$  középpontú  $Q_iP$  sugarú kör:  $k$ . ④  $k \cap b = \{R_1; R_2\}$ . Két egybevágó megoldás van.

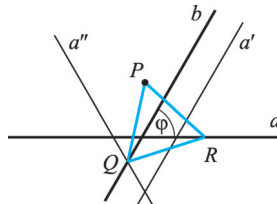
**424.** Szerkesztés: ①  $c$  egyenes elforgatása  $a$  egyenes tetszőleges  $P$  pontja körül  $+60^\circ$ -kal és  $-60^\circ$ -kal:  $c'$ ,  $c''$ . ②  $c' \cap a = Q_1$ ,  $c'' \cap a = Q_2$ . ③  $P$  középpontú  $Q_iP$  sugarú kör:  $k$ . ④  $k \cap b = \{R_1; R_2\}$ . A szerkesztés független attól, hogy  $a$   $b$  egyenes az  $a$  és  $c$  között van-e vagy sem. Végtelen sok egybevágó háromszög a megoldás.

**417.****422.****423.**

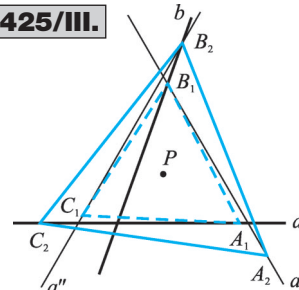
425/I.



425/II.



425/III.



**425.** a) Legyen az adott  $a$  és  $b$  egyenes hajlásszöge  $\varphi$ , a szerkesztendő háromszög  $PQR$ .  
Szerkesztés: ① az  $a$  egyenest az adott  $P$  pont körül  $+60^\circ$ -kal és  $-60^\circ$ -kal elforgatjuk:  $a', a''$ .  
②  $a' \cap b = Q_1$ ,  $a'' \cap b = Q_2$ . ③  $Q_1$  pontot  $P$  körül  $-60^\circ$ -kal elforgatjuk:  $R_1$ ;  $Q_2$  pontot  $P$  körül  $+60^\circ$ -kal elforgatjuk:  $R_2$ . Egy megoldás van, ha  $\varphi = 60^\circ$ , két megoldás van egyébként.

b) Legyen az adott  $a$  és  $b$  egyenes hajlásszöge  $\varphi$ , a szerkesztendő háromszög  $ABC$ .  
Szerkesztés: ① az  $a$  egyenest az adott  $P$  pont körül elforgatjuk  $+120^\circ$ -kal és  $-120^\circ$ -kal:  $a', a''$ .  
②  $a' \cap b = B_1$ ,  $a'' \cap b = B_2$ . ③  $B_1$  pontot  $P$  körül  $-120^\circ$ -kal és  $+120^\circ$ -kal elforgatjuk:  $A_1, C_1$ .  
④  $B_2$  pontot  $P$  körül  $-120^\circ$ -kal és  $+120^\circ$ -kal elforgatjuk:  $A_2, C_2$ . Egy megoldás van, ha  $\varphi = 60^\circ$ , két megoldás van egyébként.

**426.** Szerkesztés: ① a  $BC$  egyenest az adott  $P$  pont körül  $+60^\circ$ -kal és  $-60^\circ$ -kal elforgatjuk:  $c', c''$ . ②  $c' \cap e(A; C) = Q_1$ ,  $c'' \cap e(A; C) = Q_2$ . ③  $Q_1$  pontot  $P$  körül  $-60^\circ$ -kal elforgatjuk:  $R_1$ ,  $Q_2$  pontot  $P$  körül  $+60^\circ$ -kal elforgatjuk:  $R_2$ . A megoldások száma 1 vagy 0 aszerint, hogy létrejön-e a  $Q_1$  és  $Q_2$  metszéspont, illetve a  $Q_i$  és  $R_i$  belső pontja-e az  $ABC\Delta$  oldalainak.

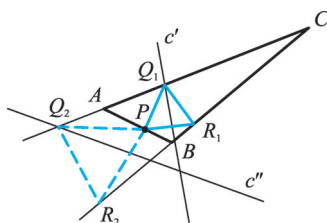
**427.** Szerkesztés: ① az  $a$  egyenest az adott  $P$  pont körül  $+90^\circ$ -kal és  $-90^\circ$ -kal elforgatjuk  $\rightarrow a', a''$ . ②  $a' \cap b = Q_1$ ,  $a'' \cap b = Q_2$ . ③  $Q_1$  pontot  $P$  körül  $-90^\circ$ -kal elforgatjuk  $\Rightarrow R_1$ ,  $Q_2$  pontot  $P$  körül  $+90^\circ$ -kal elforgatjuk  $\rightarrow R_2$ . Ha a  $P$  pont az  $a$  és  $b$  egyenes metszéspontja, akkor vagy végtelen sok megoldás van (a két egyenes merőleges egymásra), vagy nincs megoldás (a két egyenes nem merőleges egymásra). Két egybevágó megoldás van, ha  $a \parallel b$ . Egyébként két nem egybevágó megoldás van.

**428.** Legyen  $a \parallel b$ ,  $PQRS$  a szerkesztendő négyzet.  
Szerkesztés: ①  $a$  egyenest  $P$  pont körül  $+90^\circ$ -kal és  $-90^\circ$ -kal elforgatjuk  $\rightarrow a', a''$ . ②  $a' \cap b = Q_1$ ,  $a'' \cap b = Q_2$ . ③  $Q_1$  pontot  $-90^\circ$ -kal,  $Q_2$  pontot  $+90^\circ$ -kal elforgatjuk  $P$  pont körül  $\rightarrow S_1, S_2$ . ④  $P$  tükrözése  $Q_i S_i$  egyenesre  $\rightarrow R_i$ . Mindig két egybevágó megoldás van.

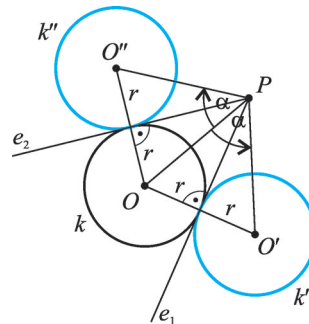
**429.** a) Szerkesztés: ① a  $k$  kör  $O$  középpontját az adott  $P$  pont körül  $+90^\circ$ -kal és  $-90^\circ$ -kal elforgatjuk  $\rightarrow O', O''$ . ②  $O'$  középpontú  $OP$  sugarú kör  $\rightarrow k', O''$  középpontú  $OP$  sugarú kör  $\rightarrow k''$ . Két megoldás van.

b) Szerkesztés: ①  $PO$  szárú,  $2r$  alapú egyenlő szárú háromszög  $\rightarrow$  szárszöge  $\alpha$ . ② a  $k$  kört az adott  $P$  pont körül  $+\alpha$  és  $-\alpha$  szöggel elforgatjuk  $\rightarrow k', k''$ . Két megoldás van.

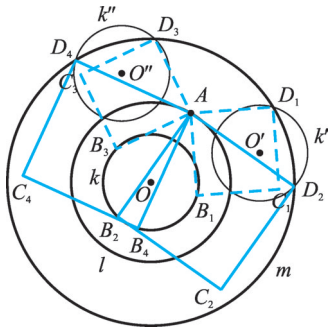
426.



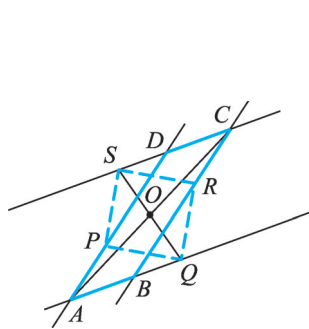
429.



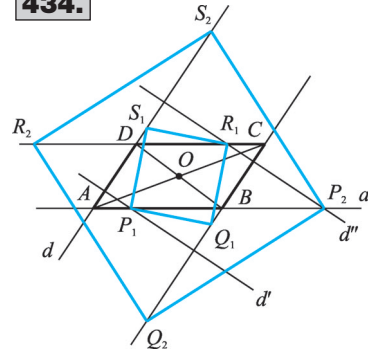
432.



433.



434.



**430.** Szerkesztés: ① az  $e$  egyenest az adott  $A$  pont körül elforgatjuk  $+60^\circ$ -kal és  $-60^\circ$ -kal  $\rightarrow e', e''$ . ②  $e' \cap k = \{C_1; C_2\}$ ,  $e'' \cap k = \{C_3; C_4\}$ . ③  $C_1, C_2$   $-60^\circ$ -os  $A$  körüli elforgatottja:  $B_1, B_2$ . ④  $C_3, C_4$   $+60^\circ$ -os  $A$  körüli elforgatottja:  $B_3, B_4$ . A megoldások száma 0, 1, 2, 3, 4 lehet.

**431.** Szerkesztés: ① a  $k$  kört az adott  $A$  pont körül elforgatjuk  $+60^\circ$ -kal és  $-60^\circ$ -kal  $\rightarrow k', k''$ . ②  $k' \cap l = \{B_1; B_2\}$ ,  $k'' \cap l = \{B_3; B_4\}$ . ③  $B_1, B_2$   $-60^\circ$ -os  $A$  körüli elforgatottja:  $C_1, C_2$ . ④  $B_3, B_4$   $+60^\circ$ -os  $A$  körüli elforgatottja:  $C_3, C_4$ . A megoldások száma 0, 1, 2, 3, 4, vagy végtelen sok lehet.

**432.** Szerkesztés: ① a  $k$  kört az  $l$  kör tetszőleges  $A$  pontja körül elforgatjuk  $+90^\circ$ -kal és  $-90^\circ$ -kal  $\rightarrow k', k''$ . ②  $k' \cap m = \{D_1; D_2\}$ ,  $k'' \cap m = \{D_3; D_4\}$ . ③  $D_1, D_2$   $-90^\circ$ -os  $A$  körüli elforgatottja:  $B_1, B_2$ . ④  $D_3, D_4$   $+90^\circ$ -os  $A$  körüli elforgatottja:  $B_3, B_4$ . ⑤  $D_i$  középpontú  $AD_i$  sugarú kör  $\rightarrow p_i$ ;  $B_i$  középpontú  $AD_i$  sugarú kör  $\rightarrow q_i$ . ⑥  $p_i \cap q_i = C_i$ . Adott  $A$  pont esetén a megoldások száma 0, 2, 4 lehet, két-két négyzet mindig egybevágó a szimmetria miatt. Mivel  $A$  tetszőleges, 0 vagy végtelen sok egybevágó megoldás lehet.

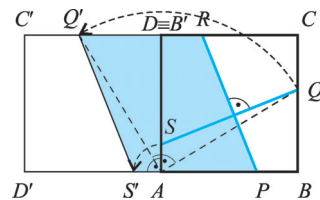
**433.**  $PQRS$  négyzet középpontja  $O \Rightarrow PO = OR \Rightarrow O$  pont egyenlő távolságra van az  $AD$  és  $BC$  párhuzamos egyenesektől.  $\Rightarrow O$  rajta van az  $AD$  és  $BC$  középpárhuzamosán. Hasonlóan  $O$  rajta van az  $AB$  és  $CD$  középpárhuzamosán.  $\Rightarrow O$  a két középpárhuzamos metszéspontja  $\Rightarrow O$  az  $ABCD$  paralelogramma középpontja.

**434.** Legyen  $AB \parallel CD, AB = CD$ .  $PQRS$  a szerkesztendő négyzet. Szerkesztés: ①  $e(A; C) \cap e(B; D) = O$ ,  $e(A; D) = d$ ,  $e(A; B) = a$ . ②  $d$  egyenest  $O$  pont körül  $+90^\circ$ -kal és  $-90^\circ$ -kal elforgatjuk  $\rightarrow d', d''$ . ③  $d' \cap a = P_1$ ,  $d'' \cap a = P_2$ . ④  $P_1$  pontot  $-90^\circ$ -kal,  $P_2$  pontot  $+90^\circ$ -kal elforgatjuk  $O$  pont körül  $\rightarrow S_1, S_2$ . ⑤  $P_i$  tükrözése  $O$  pontra  $\rightarrow R_i$ ;  $S_i$  tükrözése  $O$  pontra  $\rightarrow Q_i$ . Nincs megoldás, ha  $ABCD$  téglalap és  $AB \neq AD$ . Végtelen sok megoldás van, ha  $ABCD$  négyzet. Egyébként két megoldás van.

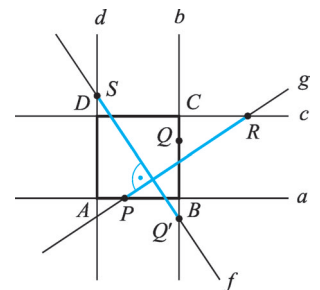
**435.** Adott az  $ABCD$  négyzet,  $SQ \perp RP$ . Forgassuk el  $ABCD$ -t  $A$  körül  $+90^\circ$ -kal:  $ADC'D'$  négyzet.  $QS$  elforgatottja  $Q'S' \Rightarrow Q'S' \parallel RP$ , valamint  $Q'R \parallel S'P \Rightarrow RPS'Q'$  paralelogramma  $\Rightarrow QS = Q'S' = RP$ .

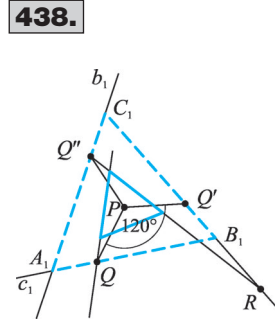
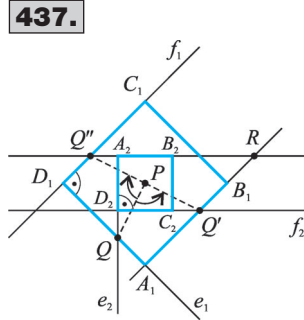
**436.** A 435. feladatban láttuk, hogy ha  $f \perp g$ , akkor  $PR = SQ'$ . Szerkesztés: ①  $S$  pontból merőlegest állítunk  $PR$  egyenesre  $\rightarrow f$ . ②  $S$  középpontú  $PR$  sugarú kör  $\rightarrow k$ . ③  $k \cap f = Q'$ . ④  $QQ'$  a négyzet egyik oldalegyenese  $\rightarrow b$ . ⑤  $P$  pontból merőlegest állítunk  $QQ'$ -re  $\rightarrow a$ ;  $R$  pontból merőlegest állítunk  $QQ'$ -re  $\rightarrow c$ ;  $S$  pontból merőlegest állítunk  $a$ -ra  $\rightarrow d$ . ⑥  $a \cap d = A$ ,  $a \cap b = B$ ,  $b \cap c = C$ ,  $c \cap d = D$ . Egyértelmű a megoldás, ha az adott  $P, Q, R, S$  pontok sorban az  $a, b, c, d$ , egyenesek pontjai.

435.



436.





**437.** Szerkesztés: ①  $Q$  pontot elforgatjuk  $P$  pont körül  $+90^\circ$ -kal és  $-90^\circ$ -kal  $\rightarrow Q', Q''$ . ②  $Q'R$  és  $Q''R$  egyenest tükrözzük  $P$  pontra  $\rightarrow f_1, f_2$ . ③  $Q$  pontból merőlegest állítunk  $Q'R$  és  $Q''R$  egyenesre  $\rightarrow e_1, e_2$ . ④  $e_1 \cap f_1 = D_1, e_2 \cap f_2 = D_2, e_1 \cap Q'R = A_1, e_2 \cap Q''R = A_2$ . ⑤  $A_i$  tükrözése  $P$  pontra  $\rightarrow C_i; D_i$  tükrözése  $P$  pontra  $\rightarrow B_i$ . A megoldások száma 2 vagy végtelen sok.

**438.** Szerkesztés: ①  $Q$  pontot elforgatjuk  $P$  pont körül  $+120^\circ$ -kal és  $-120^\circ$ -kal  $\rightarrow Q', Q''$ . ②  $Q'R$  egyenest elforgatjuk  $P$  pont körül  $+120^\circ$ -kal és  $-120^\circ$ -kal  $\rightarrow c_1, b_1$ . ③  $Q''R$  egyenest elforgatjuk  $P$  pont körül  $+120^\circ$ -kal és  $-120^\circ$ -kal  $\rightarrow c_2, b_2$ . ④  $c_1 \cap b_1 = A_1, c_2 \cap b_2 = A_2, c_1 \cap Q'R = B_1, c_2 \cap Q''R = B_2, b_1 \cap Q'R = C_1, b_2 \cap Q''R = C_2$ . Két megoldás van, ha  $Q_i \neq R$ , végtelen sok megoldás van, ha  $Q_i = R$ .

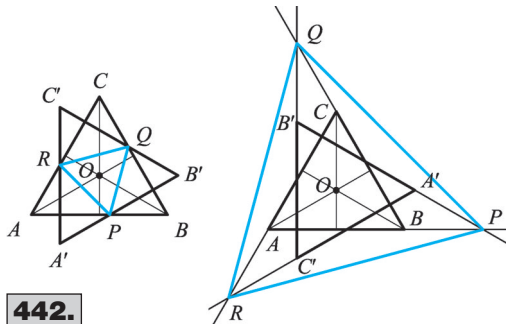
**439.** Szerkesztés: ①  $e$  egyenest elforgatjuk  $C$  pont körül  $+\alpha$  és  $-\alpha$  szöggel  $\rightarrow e', e''$ . ②  $e' \cap f = B_1, e'' \cap f = B_2$ . ③  $C$  középpontú  $CB_i$  sugarú kör  $\rightarrow k_i$ . ④  $k_1 \cap e = A_1, k_2 \cap e = A_2$ . A megoldások száma lehet 1, 2, végtelen sok.

**440.**  $ABC\Delta$  szabályos, középpontja  $O$ ;  $PQR\Delta$  szabályos és  $P \in BC, Q \in AC, R \in AB$ .  $PQR\Delta$  szabályos  $\Rightarrow \angle AQR = 180^\circ - (60^\circ + \angle ARQ)$  és  $\angle PRB = 180^\circ - (\angle ARQ + 60^\circ)$ .  $\angle AQR = \angle PRB$ ,  $QR = PR, \angle QAR = \angle PBR = 60^\circ \Rightarrow \triangle AQR \cong \triangle PRB \Rightarrow AR = BP$  és  $QA = RB$ .  $ABC\Delta$ -et  $O$  pont körül  $+120^\circ$ -kal elforgatva  $A' \equiv B, (AR)' = BP, (QA)' = RB \Rightarrow R' \equiv B, Q' \equiv R \Rightarrow O$  pont rajta van a  $QR$  és az  $RP$  szakasz felező merőlegesén, vagyis  $PQR\Delta$ -nek is középpontja.

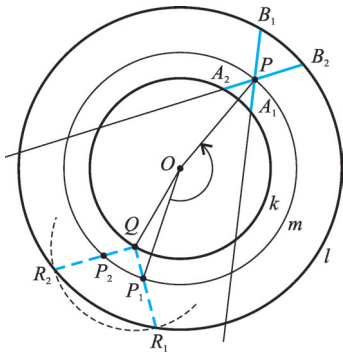
**441.**  $ABC$  szabályos háromszögbe írunk  $b$  oldalú  $A'B'C'$  szabályos háromszöget. A 439. feladatban láttuk, hogy  $ABC\Delta$  és  $A'B'C'\Delta$  középpontja egybeesik. Szerkesztés: ①  $b$  oldalú szabályos háromszög szerkesztése  $\rightarrow PQR\Delta$ . ②  $PQR\Delta$  középpontja  $K$ ;  $ABC\Delta$  középpontja  $O$ . ③  $O$  középpontú  $PK$  sugarú kör  $\rightarrow k$ . ④  $k \cap BC = \{A'; A''\}, k \cap AC = \{B'; B''\}, k \cap AB = \{C'; C''\} \Rightarrow \Rightarrow A'B'C'\Delta$  és  $A''B''C''\Delta$ . Két egybevágó háromszög a megoldás, ha  $\frac{a}{2} < b < a$ . Egy megoldás van, ha  $b = \frac{a}{2}$ . Nincs megoldás, ha  $b < \frac{a}{2}$  vagy  $b \geq a$ .

**442.** Legyen az  $ABC\Delta$   $O$  pont körüli  $\varphi$  szögű elforgatottja  $A'B'C'\Delta$ . Forgassuk el  $O$  pont körül  $+120^\circ$ -kal az  $ABC\Delta$ -et:  $A$  képe  $B; B$  képe  $C; C$  képe  $A$ . Forgassuk el  $O$  pont körül  $+120^\circ$ -kal az  $A'B'C'\Delta$ -et:  $A'$  képe  $B'; B'$  képe  $C'; C'$  képe  $A'$ . Mivel két egyenes metszéspontjának elforgatottja megegyezik az elforgatott egyenesek metszéspontjával:  $AB \cap A'B' = P \Rightarrow BC \cap B'C' = P'$  és  $BC \cap B'C' = Q \Rightarrow \Rightarrow CA \cap C'A' = Q'$  és  $CA \cap C'A' = R \Rightarrow AB \cap A'B' = R'$ . Ezek szerint  $P' \equiv Q; Q' \equiv R; R' \equiv P \Rightarrow \Rightarrow PQR$ -et az  $O$  pont körüli  $+120^\circ$ -os elforgatás önmagába viszi  $\Rightarrow PQR\Delta$  szabályos. Ha  $\varphi = 120^\circ$ , vagy  $\varphi = 180^\circ$ , vagy  $\varphi = 240^\circ$ , akkor nem jön létre a  $PQR\Delta$ .

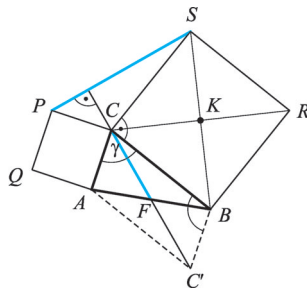
**442.**



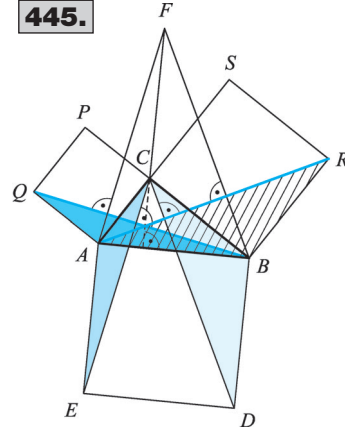
443.



444.



445.



**443.** Legyen  $Q$  pont a  $k$  kör tetszőleges pontja,  $d$  az adott hosszúság. Szerkesztés: ①  $Q$  középpontú  $d$  sugarú kör és  $k$  kör közös pontjai:  $R_1, R_2$ . ②  $O$  középpontú  $OP$  sugarú kör  $\rightarrow m$ . ③  $m \cap QR_1 = P_1, m \cap QR_2 = P_2$ . ④  $QR_1$  szakaszt elforgatjuk  $O$  pont körül  $P_1OP$ -gel  $\rightarrow A_1B_1$ . ⑤  $QR_2$  szakaszt elforgatjuk  $O$  pont körül  $P_2OP$ -gel  $\rightarrow A_2B_2$ . A megoldások száma 2, 1 vagy 0.

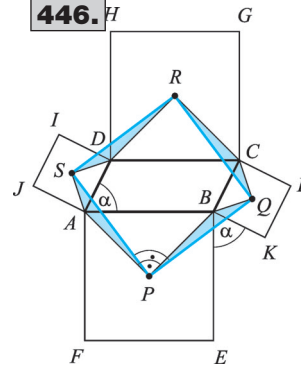
**444.** A  $C$  csúshoz tartozó súlyvonal felezi az  $AB$  szakaszt  $\rightarrow F$ .  $C$  pont  $F$  pontra vonatkozó tükörképe  $C'$ .  $AF = FB$  és  $CF = C'F \Rightarrow AC'BC$  négyszög paralelogramma  $\Rightarrow AC \parallel BC', AC = BC'$  és  $C'BC \sphericalangle = 180^\circ - \gamma$ .  $BC' = AC = CP$  ( $ACPQ$  négyzet oldalai),  $CB = CS$  ( $CBRS$  négyzet oldalai),  $180^\circ - \gamma = PCS \sphericalangle = C'BC \sphericalangle \Rightarrow PCS\Delta \cong C'BC\Delta$ .  $CB \perp CS \Rightarrow PCS\Delta$  a  $C'BC\Delta$   $K$  pont körüli  $-90^\circ$ -os elforgatottja  $\Rightarrow PS = CC'$  és  $PS \perp CC' \Rightarrow PS = 2CF$  és  $PS \perp CC'$ .

**445.**  $BRSC, ACPQ, ABDE$  négyzetek,  $CF = AB$  és  $CF \perp AB$ .

$BCD\Delta$   $B$  pont körüli  $-90^\circ$ -os elforgatása  $\Rightarrow B' \equiv B, C' \equiv R, D' \equiv A \rightarrow BRA\Delta \Rightarrow CD \perp AR$ .  $ACE\Delta$   $A$  pont körüli  $+90^\circ$ -os elforgatása  $\Rightarrow A' \equiv A, C' \equiv Q, E' \equiv B \rightarrow AQB\Delta \Rightarrow CE \perp BQ$ .  $CF = AB$  és  $CF \perp AB \Rightarrow CF = BD$ .  $CF = AE, CF \parallel BD \parallel AE \Rightarrow CDBF$  és  $CEAF$  négyszög paralelogramma  $\Rightarrow CD \parallel BF, CE \parallel AF \Rightarrow BF \perp AR, AF \perp BQ$ .  $ABF\Delta$ -ben  $CF, AR$  és  $BQ$  magasságvonalak, azaz egy pontban metszik egymást.  $CF$  egyenes az  $ABC\Delta$ -nek is magasságvonala  $\Rightarrow AR \cap BQ \in CF$ .

**446.**  $ABEF, BCLK, CDHG, ADIJ$  négyzetek,  $AB \parallel CD$  és  $AB = CD$ .  $AP = PB$  ( $ABEF$  négyzet félátlói),  $AS = BQ$  ( $ADIJ$ , illetve  $BCLK$  négyzet félátlói),  $SAP \sphericalangle = QBP \sphericalangle = 45^\circ + \alpha + 45^\circ \Rightarrow SAP\Delta \cong QBP\Delta$ .  $APB \sphericalangle = 90^\circ \Rightarrow SAP\Delta$   $P$  pont körüli  $90^\circ$ -os elforgatottja a  $QBP\Delta \Rightarrow SP = PQ$  és  $SPQ \sphericalangle = 90^\circ$ . Hasonlóan belátható, hogy  $PQ = QR$  és  $PQR \sphericalangle = 90^\circ \Rightarrow PQRS$  négyszög négyzet.

446.



Eltolás

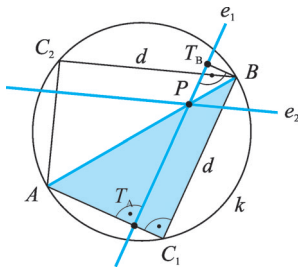
**447.** Megoldását az olvasóra bízjuk.

**448.**  $ABCD$  négyzet  $\vec{AP}, \vec{BP}, \vec{CP}, \vec{DP}$  vektorral való eltolása lehet a megoldás.

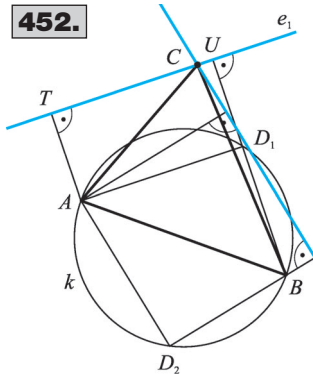
**449.**  $\vec{OK}$  vektorral toljuk el a négyzetet, ahol a négyzet középpontja  $O$ , a köré pedig  $K$ .

**450.** Legyen a  $b$  egyenesen lévő szakasz merőleges vetülete az  $a$  egyenesen  $d$  hosszúságú. Szerkesztés: ① Tetszőleges  $TU = d$  szakasz felvétele az  $a$  egyenesen. ②  $T$ -ben és  $U$ -ban merőlegest állítunk  $a$ -ra  $\rightarrow m, n$ . ③  $m \cap b = P, n \cap b = Q$ . Végtelen sok megoldás van.

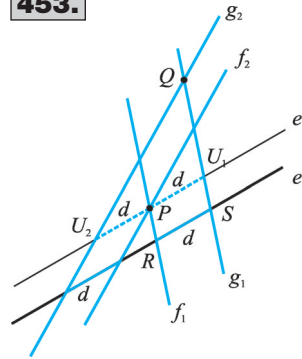
451.



452.



453.



**451.**  $T_B T_A \xrightarrow{T_B B} BC_1 \Rightarrow ABC_1 \Delta$  derékszögű. Szerkesztés: ①  $AB$  Thalész köre  $\rightarrow k$ . ②  $B$  középpontú  $d$  sugarú kör  $\rightarrow l$ . ③  $l \cap k = \{C_1; C_2\}$ . ④  $BC_1$ -vel  $P$  ponton át párhuzamost húzunk  $\rightarrow e_i$  egyenes. Két megoldás van, ha  $d < AB$ . Egy megoldás van, ha  $d = AB$ . Nincs megoldás, ha  $d > AB$ .

**452.** A 451. feladat módszerével szerkesztünk: ①  $AB$  Thalész köre  $\rightarrow k$ . ②  $A$  középpontú  $d$  sugarú kör  $\rightarrow l$ . ③  $l \cap k = \{D_1; D_2\}$ . ④  $AD_1$ -vel  $C$  ponton át párhuzamost húzunk  $\rightarrow e_i$  egyenes. Két megoldás van, ha  $d < AB$ . Egy megoldás van, ha  $d = AB$ . Nincs megoldás, ha  $d > AB$ . Hasonló a szerkesztés  $A$ , illetve  $B$  csúcson átmenő egyenesek esetén is.

**453.** Adott az  $e$  egyenes, valamint  $P$  és  $Q$  pontok.

**1. eset:**  $PQ$  nem párhuzamos az  $e$  egyenessel. Szerkesztés: ①  $P$  ponton át párhuzamost húzunk  $e$  egyenessel  $\rightarrow e'$ . ②  $P$  középpontú  $d$  sugarú kör  $\rightarrow l$ . ③  $l \cap e' = \{U_1; U_2\}$ . ④  $U_1 Q$  egyenes  $\rightarrow g_i$ . ⑤  $g_i$ -vel  $P$  ponton át párhuzamost húzunk  $\rightarrow f_i$  egyenes. Két megoldás van.

**2. eset:** Ha  $PQ \parallel e$  és  $d(P; Q) = d$ , akkor végtelen sok megoldás van, mert bármely  $P$ -n, ill.  $Q$ -n áthaladó párhuzamos egyenespár megfelel.

**3. eset:** Ha  $PQ \parallel e$  és  $d(P; Q) \neq d$ , akkor nincs megoldás.

**454.** Toljuk el az  $ABC \Delta$ -et az  $e$  egyenessel párhuzamosan úgy, hogy  $B$  csúcsa az  $f$  egyenesre kerüljön. Szerkesztés: ①  $B$  ponton át párhuzamost húzunk  $e$  egyenessel  $\rightarrow e'$ . ②  $f \cap e' = B'$ .

③  $\vec{BB'}$  vektorral eltoljuk  $A$  és  $C$  pontot  $\rightarrow A'$  és  $C'$ . Nincs megoldás, ha  $e' \parallel f$ , végtelen sok megoldás van, ha  $e' \equiv f$ , egyébként egy megoldás van.

**455.**  $\vec{AB} = \vec{A'B'} \Rightarrow ABB'A'$  paralelogramma  $\Rightarrow \vec{AA'} = \vec{BB'}$ . Hasonlóan  $\vec{BB'} = \vec{CC'}$ .

**456.**  $O_1$  és  $O_2$  a  $k_1$ , ill.  $k_2$  kör középpontja. A  $k_1$  kört  $\vec{O_1 O_2}$  vektorral eltolva  $k_2$  kör adódik.  $A_i \in k_1$  és  $A_i B_i \parallel O_1 O_2$  és  $B_i \in k_2 \Rightarrow B_i$  pont az  $A_i$ -nek  $\vec{O_1 O_2}$  vektorral való eltoltja  $\Rightarrow A_i B_i = \vec{O_1 O_2}$ .

**457.** Adott  $a$  és  $b$  egyenes,  $AB$  szakasz. Szerkesztés: ①  $a$  eltoltja  $\vec{AB}$ -ral:  $a''$ . ②  $a$  eltoltja  $\vec{BA}$ -ral:  $a'$ . ③  $a' \cap b = C_2$  és  $a'' \cap b = C_1$ . ④  $C_1$  eltoltja  $\vec{BA}$ -ral:  $D_1$  és  $C_2$  eltoltja  $\vec{AB}$ -ral:  $D_2$ . Két megoldás van.

**458.** Szerkesztés: ①  $e \xrightarrow{\vec{AB}} e'$  és  $e \xrightarrow{\vec{BA}} e''$  ②  $e' \cap f = C_1$  és  $e'' \cap f = C_2$ . ③  $C_1 \xrightarrow{\vec{BA}} D_1$  és  $C_2 \xrightarrow{\vec{AB}} D_2$ . A megoldások száma 0, 1, 2 vagy végtelen sok lehet.

**459.** Adott az  $ABC\Delta$  és a  $PQ$  szakasz.  $A, B, C$  pontokon át párhuzamosokat húzunk  $PQ$ -val  $\rightarrow f, g, h$ . Közülük valamelyik metszi az egyik oldalt, például  $f$  egyenes metszi a  $BC$  szakaszt.  $\Rightarrow BC$  oldalon lesz két csúcs, ezért az  $a$  oldalegyenesből indul ki a szerkesztés.

Szerkesztés: ①  $a \xrightarrow{\vec{QP}} a'$ . ②  $a' \cap AC = G$  és  $a' \cap AB = J$ . ③  $G \xrightarrow{\vec{PQ}} H$  és  $J \xrightarrow{\vec{PQ}} I \Rightarrow GHJI$  paralelogramma. A megoldások száma 1 vagy 0.

**460.** Adott a  $k$  kör és az  $AB$  szakasz. Szerkesztés: ①  $k \xrightarrow{\vec{AB}} k'$ . ②  $k \cap k' = \{M_1; M_2\}$ . ③  $M_1 \xrightarrow{\vec{BA}} N_1$  és  $M_2 \xrightarrow{\vec{BA}} N_2$ . Két megoldás van, ha  $d(A; B) < 2r$ ; egy megoldás van, ha  $d(A; B) = 2r$ ; nincs megoldás, ha  $d(A; B) > 2r$ .

**461.** Szerkesztés: ①  $k \xrightarrow{\vec{AB}} k'$ . ②  $k \cap k' = \{C_1; C_2\}$ . ③  $C_1 \xrightarrow{\vec{BA}} D_1$  és  $C_2 \xrightarrow{\vec{BA}} D_2$ .

Két megoldás van, ha  $d(A; B) < 2r$ ; egy megoldás van, ha  $d(A; B) = 2r$ ; nincs megoldás, ha  $d(A; B) > 2r$  vagy  $C_1, D_1, A, B$  egy egyenesen vannak.

**462.** Adott a  $k$  kör és az  $AB$  szakasz. Szerkesztés: ①  $k \xrightarrow{\vec{AB}} k'$ . ②  $k \cap k' = \{C_1; C_2\}$ . ③  $CA$  szakasz felezőpontja  $O_i$ . Két megoldás van, ha  $d(A; B) < 2r$ ; egy megoldás van, ha  $d(A; B) = 2r$ ; nincs megoldás, ha  $d(A; B) > 2r$ .

**463.** Adott a  $k$  és  $l$  kör, valamint a  $PQ$  szakasz. Szerkesztés: ①  $k \xrightarrow{\vec{PQ}} k'$  és  $k \xrightarrow{\vec{QP}} k''$ . ②  $l \cap k' = \{M_1; M_2\}$  és  $l \cap k'' = \{M_3; M_4\}$ . ③  $M_1 \xrightarrow{\vec{QP}} N_1$  és  $M_2 \xrightarrow{\vec{QP}} N_2, M_3 \xrightarrow{\vec{PQ}} N_3$  és  $M_4 \xrightarrow{\vec{PQ}} N_4$ . 0; 1; 2; 3; 4 vagy végtelen sok megoldás lehet.

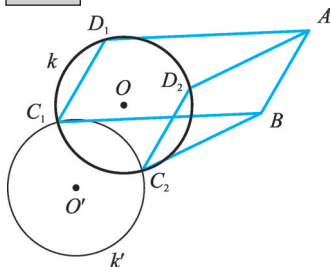
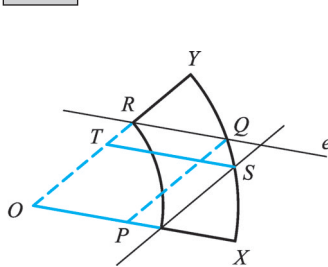
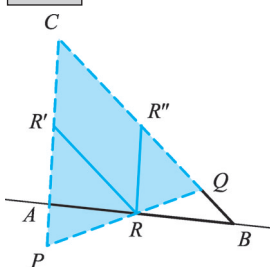
**464.** Adott az  $e$  egyenes, a  $k$  kör és az  $AB$  szakasz. Szerkesztés: ①  $e \xrightarrow{\vec{AB}} e'$  és  $e \xrightarrow{\vec{BA}} e''$ . ②  $k \cap e' = \{E_1; E_2\}$  és  $k \cap e'' = \{E_3; E_4\}$ . ③  $E_1 \xrightarrow{\vec{BA}} F_1, E_2 \xrightarrow{\vec{BA}} F_2, E_3 \xrightarrow{\vec{AB}} F_3$  és  $E_4 \xrightarrow{\vec{AB}} F_4$ . ④  $E_i F_i$  egyenesek a megoldások. Négy, három, kettő, egy vagy nulla megoldás lehet.

**465.** Szerkesztés: ①  $O$  pontból az  $OY$  sugárra  $d$  távolságot mérünk  $\rightarrow R$ . ②  $R$  ponton át  $OX$  sugárral párhuzamosot húzunk  $\rightarrow e$ . ③ Az  $e$  egyenes és  $XY$  ív metszéspontja  $\rightarrow Q$ . ④  $Q$  pontot  $\vec{RO}$  vektorral eltoljuk  $\rightarrow P$ . ⑤  $PQ$  szakasz. ⑥ Hasonlóan adódik  $ST$  szakasz. A megoldások száma 2 vagy 0.

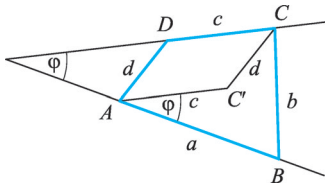
**466.** Legyen az  $ABC\Delta$ -ben  $AC = BC$ ; valamint  $P \in AB; Q \in AC; R \in BC$  úgy, hogy  $PQ \parallel BC$  és  $PR \parallel AC, PQ \parallel CR, PR \parallel QC \Rightarrow$  a  $PRCQ$  négyszög paralelogramma  $\Rightarrow PR = QC, APQ\angle = ABC\angle = \alpha$ , mert egyállású szögek  $\Rightarrow APQ\Delta$  egyenlő szárú  $\Rightarrow AQ = QP. PQ + PR = AQ + QC = AC$ , ami állandó.

**467.** Adott az  $ABC\Delta$  és egy  $d$  hosszúságú szakasz. A 466. feladatban láttuk, hogy  $CPQ$  egyenlő szárú háromszögben  $PQ$  szakasz pontjaira fennáll az  $RR' + RR'' = CP$  egyenlőség.

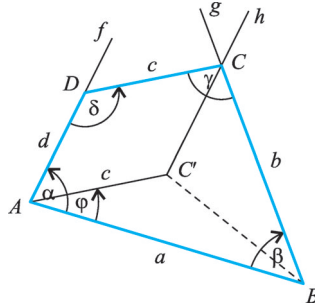
Szerkesztés: ①  $CP = CQ = d$ , ahol  $P$  a  $CA$  félegyenes,  $Q$  pedig a  $CB$  félegyenes pontja. ②  $PQ \cap AB = R$ . Egy adott oldalhoz nulla vagy egy vagy végtelen sok megoldás lehet.

**461.****465.****467.**

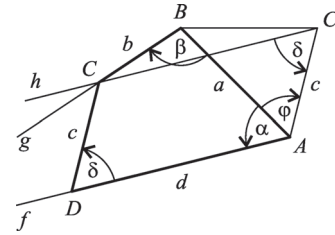
469.



470/I.



470/II.



**468.** Az  $ABCD$  trapéz alapjai:  $AB \geq CD$ . Toljuk el a  $B$  csúcsot  $\vec{CD}$  vektorral:  $E$ .  
 Szerkesztés: ①  $a - c, b, d \rightarrow AED\Delta$ . ②  $AE$  szakasszal párhuzamos egyenest húzunk  $D$  ponton át  $\rightarrow e$ . ③  $e$  egyenesre  $D$  pontból  $c$  szakasz felmérése  $\rightarrow C$  ( $AD$ -nek  $E$ -vel azonos oldalán). ④  $C$  pontot  $\vec{DE}$ -ral eltoljuk  $\rightarrow B$  pont. Nincs megoldás, ha  $a - c, b, d$  szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, egyébként egy megoldás van.

**469.** Ha  $C$  pont  $\vec{DA}$  vektorral eltoltt képe  $C'$  pont, akkor  $\vec{CC'} = \vec{DA}$  és  $C'AB\angle = \varphi$ .  
 Szerkesztés: ①  $a, c, \varphi \rightarrow ABC'\Delta$ . ②  $C'$  középpontú  $d$  sugarú kör és  $B$  középpontú  $b$  sugarú kör metszéspontja  $C_1, C_2$ . ③  $C_1 \xrightarrow{\vec{C'A}} D_1$  és  $C_2 \xrightarrow{\vec{C'A}} D_2$ . Ha  $\varphi \neq 0$ , akkor 2, 1 vagy 0 lehet a megoldások száma. Ha  $\varphi = 0$ , akkor  $AB \parallel CD \Rightarrow$  az  $ABCD$  trapéz négy oldal ismeretében megszerkeszthető (lásd 468. feladat megoldását).

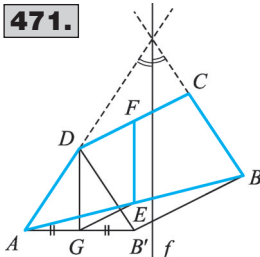
**470.** Toljuk el a  $C$  csúcsot  $\vec{DA}$  vektorral  $\rightarrow C'$  pont és  $AC'CD$  négyszög paralelogramma  $\Rightarrow |BAC'\angle| = |\alpha - (180^\circ - \delta)| = |\alpha + \delta - 180^\circ|$ .

**1. eset:**  $\alpha + \delta \neq 180^\circ$ . Szerkesztés: ①  $a, c, \alpha + \delta - 180^\circ$  vagy  $a, c, 180^\circ - (\alpha + \delta) \rightarrow ABC'\Delta$ . ②  $A$  pontban  $AB$  egyenesre  $\alpha$  szöget mérünk  $\rightarrow f$  félegenes;  $B$  pontban  $BA$  egyenesre  $\beta$  szöget mérünk  $\varphi$ -vel ellentétes irányban  $\rightarrow g$  félegenes. ③  $f$  félegenyessel párhuzamost húzunk  $C'$  ponton át  $\rightarrow h$ . ④  $h \cap g = C$ . ⑤  $C \xrightarrow{\vec{C'A}} D$ .

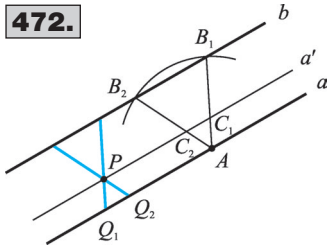
**2. eset:**  $\alpha + \delta = 180^\circ$ . Ekkor trapéz szerkesztése a feladat.

**471.** Legyen  $AD = BC$  és  $EF$  az  $ABCD$  négyszög középvonala  $\Rightarrow DF = FC$  és  $AE = EB$ . Az  $AD$  és  $BC$  szögfelezője legyen  $f$ .  $BC$  szakaszt  $\vec{CD}$  vektorral eltolva  $B'D$  szakasz adódik  $\Rightarrow$

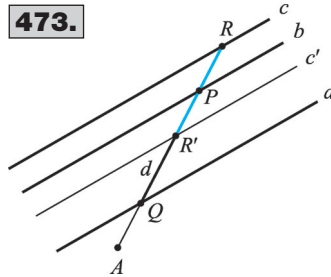
471.



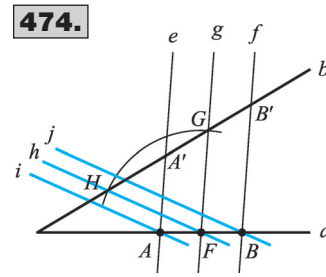
$\Rightarrow \vec{CD} = \vec{BB'}$  és  $\vec{BC} = \vec{B'D} \Rightarrow \vec{FD} = \frac{1}{2}\vec{BB'}$ .  $AB'B\Delta$  középvonalára  $\vec{EG} = \frac{1}{2}\vec{BB'}$ . Tehát  $\vec{EG} = \vec{FD}$ , ezért  $GEFD$  négyszög paralelogramma  $\Rightarrow \vec{EF} \parallel \vec{GD}$ .  $AD = BC = B'D \Rightarrow AB'D\Delta$  egyenlő szárú és  $DG$  az  $ADB'\angle$  szögfelezője.  $B'D \parallel BC \Rightarrow \vec{DG} \parallel f$ . Az aláhúzottakból  $\Rightarrow \vec{EF} \parallel f$ . Húrtrapéz esetén  $EF$  középvonal egyben az  $f$  szögfelező  $\Rightarrow \vec{EF} \parallel f$  elfajulóan teljesül.



472.



473.



474.

**472.** Szerkesztés: ① Az  $a$  egyenes tetszőleges  $A$  pontja köré  $d$  sugarú kört rajzolunk  $\rightarrow k$ . ②  $k \cap b = \{B_1; B_2\}$ . ③  $P$  ponton át párhuzamost húzunk  $a$  egyenessel  $\rightarrow a'$ . ④  $a' \cap AB_i = C_i$ . ⑤  $A \xrightarrow{\vec{C_iP}} Q_i$ . ⑥  $Q_iP$  egyenes a keresett szelő. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 a  $d$  szakasz hosszától és az  $a, b$  egyenesek távolságától függően.

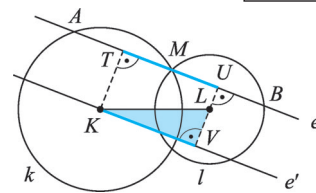
**473.**  $c$ -t tükrözzük  $b$ -re  $\rightarrow c'$ , ami egyúttal  $c$  középpontos tükröképe is  $b$  bármely pontjára.  $\Rightarrow PR = PR'$  és  $|PQ - PR| = |PQ - PR'| = R'Q$ . Az  $A$  ponton át olyan szelőt szerkesztünk, amelyből az  $a$  és a vele párhuzamos  $c'$  egyenes  $d$  hosszúságú szakaszt metsz ki (lásd a 472. feladatot).

**474.**  $AA' \parallel BB', AA' + BB' = d, ABB'A'$  négyszög trapéz, melynek középvonala  $FG = d/2$ . Szerkesztés: ①  $AB$  szakasz felezőpontja  $F$ ,  $F$  középpontú  $d/2$  sugarú kör  $\rightarrow k$ . ②  $k \cap b = \{G; H\}$ . ③  $GF$ -fel párhuzamos egyenest húzunk  $A$  ponton át  $\rightarrow e$ .  $GF$ -fel párhuzamos egyenest húzunk  $B$  ponton át  $\rightarrow f$ .  $HF$ -fel párhuzamos egyenest húzunk  $A$  ponton át  $\rightarrow i$ .  $HF$ -fel párhuzamos egyenest húzunk  $B$  ponton át  $\rightarrow j$ . A megoldások száma 2, 1 vagy 0.

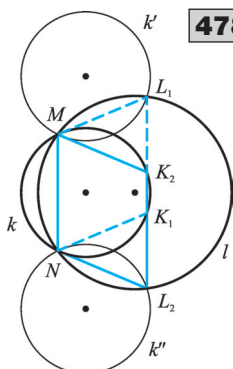
**475.**  $KT$  az  $AM$  húr,  $LU$  az  $MB$  húr felező merőlegese  $\Rightarrow \vec{AT} = \vec{TM} = \frac{1}{2} \vec{AM}$  és  $\vec{MU} = \vec{UB} = \frac{1}{2} \vec{MB}$ .  $\vec{TU} = \vec{TM} + \vec{MU} = \vec{AT} + \vec{UB} = \frac{1}{2} \vec{AM} + \frac{1}{2} \vec{MB} = \frac{1}{2} \vec{AB}$ . Általában  $TU = \frac{1}{2} \vec{AB}$ .

**476.** A 475. feladatban láttuk, hogy két kör metszéspontján átmenő szelők esetén  $TU = \frac{1}{2} \vec{AB}$ .  $AB$  maximális, ha  $TU$  is az.  $TU$  egy derékszögű trapéz alapra merőleges szára,  $KL$  a másik szár.  $TU$  maximális, ha  $TU$  szakasz párhuzamos és egyenlő  $KL$  szakasszal.

**477.** A 476. ábra jelöléseit használjuk. A 475. feladatban láttuk, hogy  $\vec{TU} = \frac{1}{2} \vec{AB} \Rightarrow TU = d/2$ . Toljuk el az  $e$  egyenest  $\vec{TK}$  vektorral  $\rightarrow e'$  egyenes. Legyen  $e'$  és  $UL$  egyenes metszéspontja  $V$ . Ekkor  $KVL\Delta$  derékszögű és  $KV = d/2$ . Szerkesztés: ①  $KL, d/2, 90^\circ \Rightarrow KLV_i\Delta$ . ②  $M$  ponton át párhuzamost húzunk  $KV_i$  egyenessel  $\rightarrow e_i$ . ③  $e_i \cap k = A_i, e_i \cap l = B_i$ . ④  $e_i$  egyenes megoldás, ha  $M$  elválasztja az  $A_i$  és  $B_i$  pontokat. Adott metszésponthoz 2, 1 vagy 0 megoldás lehet.



476.



478.

**478.** Szerkesztés: ①  $k \xrightarrow{NM} k'$  és  $k \xrightarrow{MN} k''$ . ②  $l \cap k' = \{M; L_1\}$  és  $l \cap k'' = \{N; L_2\}$ . ③  $N \xrightarrow{ML_1} K_1$ ;  $M \xrightarrow{NL_2} K_2$ . Két egybevágó megoldás van (ha  $r_1 = r_2$ , akkor nincs paralelogramma).

**479.**  $ABXY$  paralelogramma  $\Rightarrow \vec{XY} = \vec{BA} \Rightarrow Y$  pontok rajta vannak a  $k$  kör  $\vec{BA}$  vektorral eltolt képén:  $Y \in k'$ . Ha  $X \equiv B$  vagy  $X \equiv A$ , akkor nem szerkeszthető paralelogramma  $\Rightarrow A'$  és  $B'$  pontok nem lehetnek paralelogramma csúcsai. A keresett ponthalmaz a  $k'$  kör, kivéve az  $A'$  és  $B'$  pontokat.

**480.** A  $PQR$   $\Delta$ -ben  $A \in PQ$ ;  $B \in RQ$  és  $X \in e$  ( $P_iR$ ).  $PR$  egyenes  $\rightarrow e$ ,  $AB \cap e = M$ ,  $ABXY$  paralelogramma  $\Rightarrow \vec{XY} = \vec{BA} \Rightarrow Y$  pontok

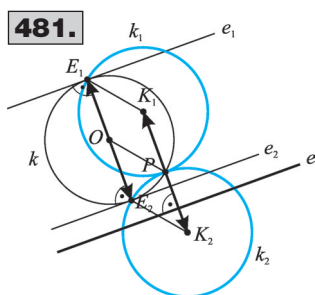
rajta vannak az  $e$  egyenes  $\vec{BA}$  vektorral eltolt képén:  $Y \in e'$ . Ha  $X \equiv M$ , akkor nem szerkeszthető paralelogramma  $\Rightarrow M'$  pont nem lehet paralelogramma csúcsa. A keresett ponthalmaz az  $e'$  egyenes, kivéve az  $M'$  pontot.

**481.** Jelölje a  $P$  ponton átmenő körök sugarát  $r$ .  $PK_1 = PK_2 = r$ ,  $K_1K_2 \perp e$ . Legyenek a tetszőleges  $P$ -n áthaladó  $k$  kör  $e$  egyenessel párhuzamos érintőinek érintési pontjai  $E_1, E_2 \Rightarrow OE_1 = OE_2 = r$ ,  $E_1E_2 \perp e \Rightarrow \vec{OE}_1 = \vec{PK}_1$  és  $\vec{OE}_2 = \vec{PK}_2 \Rightarrow \vec{PO} = \vec{K_1E_1} = \vec{K_2E_2} \Rightarrow K_1E_1 = K_2E_2 = r$ . Az érintési pontok rajta vannak a  $K_1$ , illetve a  $K_2$  középpontú  $r$  sugarú körökön  $\rightarrow k_1, k_2$ . E két kör minden pontja lehet érintési pont. A keresett ponthalmaz a  $k_1, k_2$  kör.

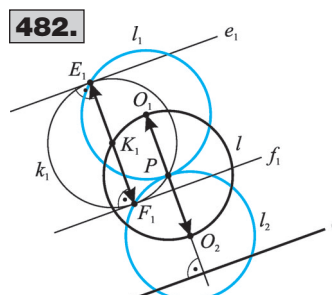
**482.** Legyen az adott irány  $e$  egyenessel párhuzamos, és jelölje az adott  $P$  középpontú kört  $l$ . A  $k_i$  körök sugara  $r$ , középpontjukra  $K_i \in l$ .  $O_1P = O_2P = r$  és  $O_1O_2 \perp e$ . Legyenek a  $k_i$  körök  $e$  egyenessel párhuzamos érintői  $e_i, f_i$  és az érintési pontok  $E_i$  és  $F_i$ . Ekkor  $K_iE_i = K_iF_i = r$  és  $E_iF_i \perp m \Rightarrow \vec{K_iE_i} = \vec{PO_1}$  és  $\vec{K_iF_i} = \vec{PO_2} \Rightarrow \vec{PK_i} = \vec{O_1E_i} = \vec{O_2F_i} \Rightarrow O_1E_i = O_2F_i = PK_i$ . A keresett pontok rajta vannak az  $O_1$ , illetve az  $O_2$  középpontú  $l$  körrel egyenlő sugarú körökön  $\rightarrow l_1, l_2$ .

E két kör minden pontja lehet érintési pont. A keresett ponthalmaz az  $l$  kör  $\vec{PO_1}$  és  $\vec{PO_2}$  vektorral való eltoltja:  $l_1, l_2$  kör.

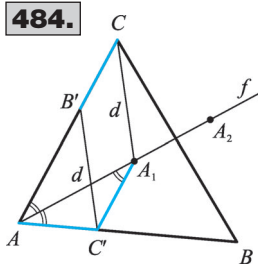
**483.** Legyen  $B'C = AC'$  és  $B'C' \parallel BC$ , valamint  $B'C$  szakasz  $\vec{B'C'}$  vektorral való eltoltja a  $C'A'$  szakasz. Ekkor  $\vec{B'C} = \vec{C'A'}$ , vagyis  $B'C$  szakasz párhuzamos és egyenlő a  $C'A'$  szakasszal.  $AC'A'\Delta$  egyenlő szárú  $\Rightarrow A'AC' \sphericalangle = AA'C' \sphericalangle$  és  $CAA' \sphericalangle = AA'C' \sphericalangle$ , mert váltószögek  $\Rightarrow AA'$  a  $CAB \sphericalangle$  szögfelezője. Szerkesztés: ①  $CAB \sphericalangle$  szögfelezője  $\rightarrow f$ . ② Az  $f$  egyenes és  $BC$  szakasz metszéspontja  $\rightarrow A'$ . ③  $A'$  ponton át  $AC$ -vel párhuzamosot húzunk  $\rightarrow AB$ -ből kimetszi  $C'$  pontot. ④  $C'$  ponton át  $BC$ -vel párhuzamosot húzunk  $\rightarrow AC$ -ből kimetszi  $B'$  pontot. ⑤  $B'C'$  a keresett szelő. Egyértelmű a megoldás.



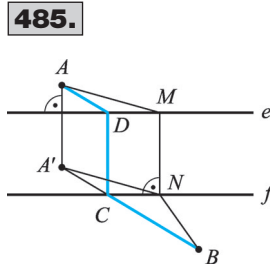
481.



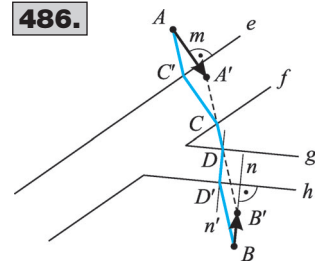
482.



484.



485.



486.

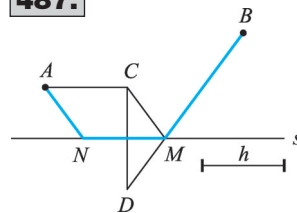
**484.** Legyen  $B'C = AC'$  és  $B'C' = d$ , valamint  $B'C$  szakasz  $\vec{B'C'}$  vektorral való eltolja a  $C'A_1$  szakasz. Ekkor  $CB'C'A_1$  négyszög paralelogramma.  $AC'A_1\Delta$  egyenlő szárú  $\Rightarrow A_1C' \sphericalR A_1C = AA_1C' \sphericalR$  és  $CAA_1 \sphericalR = AA_1C' \sphericalR$ , mert váltószögek  $\Rightarrow AA_1$  a  $CAB \sphericalR$  szögfelezője. Szerkesztés: ①  $CAB \sphericalR$  szögfelezője  $\Rightarrow f$ . ②  $C$  középpontú  $d$  sugarú kör  $\Rightarrow k$ . ③ Az  $f$  egyenes és  $k$  kör közös pontjai  $\Rightarrow A_1, A_2$ . ④  $A_1$  pontokon át  $CA$ -val párhuzamosot húzunk  $\Rightarrow AB$ -ből kimetszik a  $C'_i$  pontokat. ⑤  $C'_i$  pontokon át  $CA_i$ -vel párhuzamosokat húzunk  $\Rightarrow AC$ -ből kimetszik a  $B'_i$  pontokat. ⑥  $B'_i, C'_i$  a keresett pontok. 2, 1 vagy 0 megoldás lehet.

**485.**  $MN$  szakasz legyen merőleges az  $e$  egyenesre, és  $\vec{AA'} = \vec{MN}$ . Az út hossza  $(AM + MN + NB = AA' + A'N + NB)$  akkor a legrövidebb, ha az  $A', N$  és  $B$  pontok egy egyenesen vannak. Szerkesztés: ① Az  $A$  pontot  $e$  egyenesre merőlegesen eltoljuk  $d(e; f)$  távolsággal  $\rightarrow A'$  pont. ②  $A'B \cap f = C$ . ③  $C$  pontot eltoljuk  $\vec{A'A}$  vektorral  $\rightarrow D$  pont. ④  $ADCB$  a keresett útvonal.

**486.** Szerkesztés: ① Az  $A$  pontot  $e$  egyenesre merőlegesen eltoljuk  $d(e; f)$  távolsággal  $\rightarrow A'$  pont. ② A  $B$  pontot  $h$  egyenesre merőlegesen eltoljuk  $d(g; h)$  távolsággal  $\rightarrow B'$  pont. ③  $A'B' \cap f = C$  és  $A'B' \cap g = D$ . ④  $C$  pontot eltoljuk  $\vec{A'A}$  vektorral  $\rightarrow C'$  pont. ⑤  $D$  pontot eltoljuk  $\vec{B'B}$  vektorral  $\rightarrow D'$  pont. ⑥  $AC'CDD'B$  a keresett útvonal.

**487.**  $\vec{AC} = \vec{NM}$ ,  $d(N; M) = h \Rightarrow AN = CM$ . Legyen a  $C$  pont tükörképe az  $s$  egyenesre a  $D$  pont és  $DB \cap s = M \Rightarrow CM = MD$ . Legrövidebb idő alatt a legrövidebb utat megtéve halad a gép egyenletes sebességgel. Az út hossza  $(AN + h + MB = CM + AC + MB = AC + CM + MB = AC + DM + MB)$  akkor a legrövidebb, ha a  $D, M$ , és  $B$  pontok egy egyenesen vannak. Szerkesztés: ① Az  $A$  pontot  $s$  egyenessel párhuzamosan eltoljuk  $h$  távolsággal  $\rightarrow C$  pont. ②  $C$  pontot tükrözzük  $s$  egyenesre  $\rightarrow D$  pont. ③  $DB \cap s = M$ . ④ Az  $M$  pontot eltoljuk  $\vec{CA}$  vektorral  $\rightarrow N$  pont. ⑤  $ANMB$  a keresett útvonal.

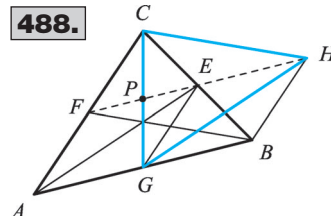
487.



**488.** a)  $\vec{CH} = \vec{FB} \Rightarrow$  az  $FBHC$  négyszög paralelogramma  $\Rightarrow \vec{BH} = \vec{FC} = \frac{1}{2} \vec{AC}$ . Az  $ABC\Delta$  középvonala  $EG \Rightarrow \vec{GE} = \frac{1}{2} \vec{AC}$  és  $\vec{AF} = \frac{1}{2} \vec{AC} \Rightarrow AGEF \cong GBHE$  paralelogrammák  $\Rightarrow \vec{AE} = \vec{GH}$ . Tehát  $CG, AE, BF$  szakaszokból eltolással háromszög szerkeszthető.

b) A  $HP$  szakasz a  $GHC\Delta$  egyik súlyvonala  $\Rightarrow HP = 3PE = \frac{3}{2} GB = \frac{3}{4} AB$ .

488.



## Egybevágósági transzformációk egymásutánja

**489.**  $TU = d(a; b)$ . A tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt  $\overline{AB} = \overline{A'B'} = \overline{A''B''}$  és  $\sphericalangle(AB; a) = -\sphericalangle(A'B'; a)$  és  $\sphericalangle(A'B'; b) = -\sphericalangle(A''B''; b)$ . Váltószögek miatt  $\sphericalangle(A'B'; a) = \sphericalangle(A'B'; b) \Rightarrow \sphericalangle(AB; a) = \sphericalangle(A''B''; b) \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{A''B''}$ . Ha  $AB$  nem merőleges az  $a$  egyenesre, akkor az aláhúzottak szerint  $AA''B''B$  négyszög paralelogramma, ezért  $AA'' \parallel BB''$  és  $AA'' = BB''$ . Ha  $AB \perp a$ , akkor  $A, A'', B'', B$  egy egyenesre esik és  $AA'' = 2d(a; b) = BB''$ . Hasonlóan belátható, hogy  $BB'' \parallel CC''$  és  $BB'' = CC''$ . Tehát  $ABC\Delta$ -t  $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{TU}$  vektorral eltolva  $A''B''C''\Delta$  adódik.

**490.** Legyen a  $P$  pont merőleges vetülete  $a$ -n  $T_a$ ;  $b$ -n  $T_b$ .  $P$  tükörképe  $a$ -ra  $P' \Rightarrow \overrightarrow{PT_a} = \overrightarrow{T_a P'}$ .

$P'$  tükörképe  $b$ -re  $P'' \Rightarrow \overrightarrow{P'T_b} = \overrightarrow{T_b P''}$ .  $\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PT_a} + \overrightarrow{T_a P'} + \overrightarrow{P'T_b} + \overrightarrow{T_b P''} = 2\overrightarrow{T_a P'} + 2\overrightarrow{T_b P''} = 2\overrightarrow{T_a T_b}$ .

**491. 1. eset:**  $P \notin t_1$  és  $P \notin t_2$ .  $P$ -t  $t_1$  egyenesre tükrözve  $\Rightarrow POT_1\Delta \cong P'OT_1\Delta$ .  $P'$ -t  $t_2$  egyenesre tükrözve  $\Rightarrow P'OT_2\Delta \cong P''OT_2\Delta$ . A fentiekből következik, hogy  $PO = P'O = P''O$  és  $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow POP'' \sphericalangle = 180^\circ \Rightarrow P''$  pont a  $P$  pont  $O$ -ra vonatkozó tükörképe.

**2. eset:**  $P \in t_1$  vagy  $P \in t_2$ .  $P \equiv P'$ ,  $PO = OP''$ ,  $POP'' \sphericalangle = 180^\circ$  vagy  $P' \equiv P''$ ,  $PO = OP''$ ,  $POP'' \sphericalangle = 180^\circ \Rightarrow P''$  pont a  $P$  pont  $O$ -ra vonatkozó tükörképe. Az  $O$  pont helyzete független a tengelyes tükrözések sorrendjétől.

**492.** Legyen  $P$  tükörképe  $A$ -ra  $P_A$ ;  $P$  tükörképe  $B$ -re  $P_B$ .  $PA = AP_A$  és  $P_A B = BP' \Rightarrow AB \parallel PP'$  és

$AB = \frac{1}{2} PP'$ , mert  $AB$  vagy középvonala a  $PP_A P'$  háromszögnek, vagy egy egyenesbe eső szakaszokról van szó  $\Rightarrow \overrightarrow{PP'} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$ . A fentiekhez hasonlóan  $PB = BP_B$  és  $P_B A = AP'' \Rightarrow AB \parallel PP''$  és

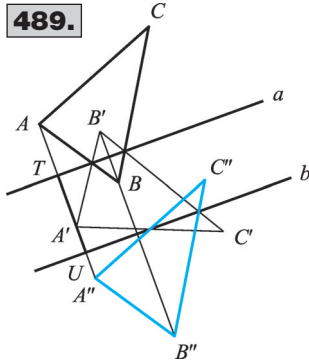
$AB = \frac{1}{2} PP'' \Rightarrow \overrightarrow{PP''} = 2 \cdot \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{PP''} = -\overrightarrow{PP'} \Rightarrow P'', P, P'$  egy egyenesre illeszkedik és  $P$  felezi a  $P'P''$  szakaszt.

**493.** Ha  $P, A$  és  $B$  pont háromszöget alkot, akkor  $PA = AP'$  és  $P'B = BP'' \Rightarrow AB$  középvonala a  $PP''P'$  háromszögnek  $\Rightarrow \overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{AB}$ . Ha  $P, A$  és  $B$  pont egy egyenesen van, akkor  $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP'}$

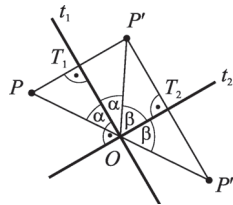
és  $\overrightarrow{P'B} = \overrightarrow{BP''} \Rightarrow \overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP''} = (\overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{P'B}) + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$ .

(Transzformációk szorzatával a megoldás: Jelöljük  $t_2$ -vel az  $AB$  egyenesre vonatkozó tükrözést,  $t_1$ -gyel és  $t_3$ -mal az  $A$  pontban és  $B$  pontban  $AB$ -re állított merőleges egyenesekre vonatkozó tükrözést,  $I$ -vel az identitást,  $f_{O; \varphi}$ -vel az  $O$  pont körüli  $\varphi$  szögű elforgatást és  $\tau_{\overrightarrow{2AB}}$ -vel a  $2\overrightarrow{AB}$ -ral való eltolást.  $f_{B; 180^\circ} \cdot f_{A; 180^\circ} = (t_3 \cdot t_2) \cdot (t_2 \cdot t_1) = t_3 \cdot (t_2 \cdot t_2) \cdot t_1 = t_3 \cdot I \cdot t_1 = t_3 \cdot t_1 = \tau_{\overrightarrow{2AB}}$ ).

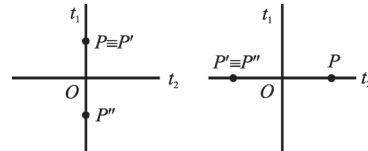
489.



491/I.



491/II.



**494.** Jelöljük a tükrözéseket  $t_a, t_b, t_c$ -vel, az identitást  $I$ -vel és az  $O$  pont körüli  $\varphi$  szögű elforgatást  $f_{O, \varphi}$ -vel, ahol  $O = a \cap c \cap b$  és  $\varphi = 2 \cdot \sphericalangle(a; b)$ .  $t_c \cdot (t_b \cdot t_a) = t_c \cdot f_{O, \varphi} = t_c \cdot (t_c \cdot t) = (t_c \cdot t_c)t = I t = t$ , ahol  $t$  a  $t_c$ -hez megválasztható tengelyes tükrözés.  $t_c \cdot t_b \cdot t_a \cdot t_c \cdot t_b \cdot t_a = t \cdot t = I$ , tehát a tükrözéssorozattal visszajutunk az eredeti pontba.

**495.** Jelöljük a tükrözéseket  $t_a, t_b, t_c$ -vel, az identitást  $I$ -vel és a  $v$ -ral való eltolást  $\tau_v$ -vel, ahol  $v \perp a$ ;  $a$ -tól  $b$  felé mutat és  $|v| = 2 \cdot d(a; b)$ .  $t_c \cdot (t_b \cdot t_a) = t_c \cdot \tau_v = t_c(t_c \cdot t) = (t_c \cdot t_c)t = I t = t$ , ahol  $t$  a  $t_c$ -hez megválasztható tengelyes tükrözés.  $t_c \cdot t_b \cdot t_a \cdot t_c \cdot t_b \cdot t_a = t \cdot t = I$ , tehát a tükrözéssorozattal visszajutunk az eredeti pontba.

**496.** A  $d$  vektorral való eltolás egyenlő bármely olyan  $K$  és  $L$  pontra vonatkozó középpontos tükrözések egymásutánjával, ahol  $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2} \underline{d}$ .

**497.** Az  $ABC \triangle BC$  és  $AC$  oldalának felezőpontja rendre  $P$  és  $Q$ . Ha  $A$ -t  $Q$ -ra tükrözzük, akkor  $C$ -t kapjuk, ha  $C$ -t  $P$ -re tükrözzük, akkor  $B$ -t kapjuk. Az  $A$  pont tehát a  $B$  pontba két középpontos tükrözés egymásutánjával kerül, ami helyettesíthető egy eltolással. Az eltolás vektora:  $2 \cdot \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AB}$ .

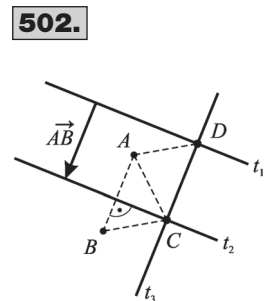
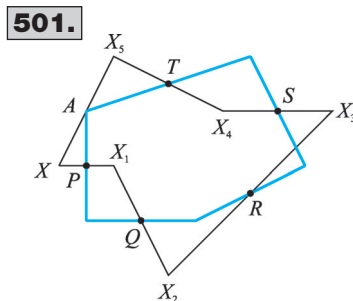
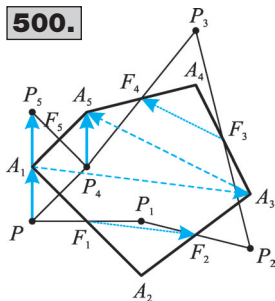
**498.** Adott  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ . A tükrözések során és  $P \xrightarrow{A} P_A \xrightarrow{B} P'$  és  $P \xrightarrow{C} P_C \xrightarrow{D} P''$   $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{AB}$  és  $\overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PP''} \Rightarrow P'$  és  $P''$  pont azonos.

**499.**  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ .  $P \xrightarrow{B} P_B \xrightarrow{D} P_D \Rightarrow \overrightarrow{PP_D} = 2\overrightarrow{BD}$  és  $P \xrightarrow{A} P_A \xrightarrow{C} P_C \Rightarrow \overrightarrow{PP_C} = 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{PP_D} = \overrightarrow{PP_C} \Rightarrow P_D \equiv P_C$ .

**500.**  $\overrightarrow{PP_2} = 2\overrightarrow{F_1 F_2} = \overrightarrow{A_1 A_3}$  és  $\overrightarrow{P_2 P_4} = 2\overrightarrow{F_3 F_4} = \overrightarrow{A_3 A_5} \Rightarrow \overrightarrow{PP_4} = \overrightarrow{A_1 A_5} \Rightarrow \overrightarrow{P_4 A_5} = \overrightarrow{P A_1}$ .  $F_5$  pontra tükrözve  $\Rightarrow \overrightarrow{P_4 A_5} = -\overrightarrow{P_5 A_1} \Rightarrow \overrightarrow{P A_1} = -\overrightarrow{P_5 A_1} = \overrightarrow{A_1 P_5} \Rightarrow A_1$  pont felezi a  $PP_5$  szakaszt.

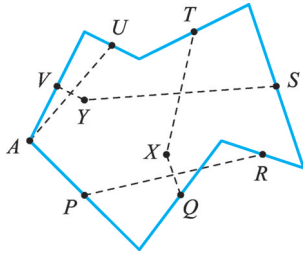
**501.** Tetszőleges  $X$  pontot sorban a  $P, Q, R, S, T$  felezőpontokra tükrözve, az utolsó tükröképet a kiindulási ponttal összekötő szakasz felezőpontja az ötszög  $P$ -vel és  $T$ -vel szomszédos csúcsa (ábránkon az  $A$  csúcs). Ennek a csúcsnak a  $P, Q, R, S, T$  pontokra vonatkozó tükröképei az ötszög többi csúcsai ( $B, C, D, E$ ). Nincs megoldás, ha az öt felezőpont egy egyenesen van.

**502.** Legyenek a középpontok rendre  $A, B, C$ .  $f_{C; 180^\circ} \cdot (f_{B; 180^\circ} \cdot f_{A; 180^\circ}) = f_{C; 180^\circ} \cdot \tau_{2\overrightarrow{AB}} = f_{C; 180^\circ} \cdot (t_2 \cdot t_1) = (t_3 \cdot t_2) \cdot (t_2 \cdot t_1) = t_3 \cdot (t_2 \cdot t_2) \cdot t_1 = t_3 \cdot I \cdot t_1 = t_3 \cdot t_1 = f_{D; 180^\circ}$ . A fenti gondolatsorban az első két tükrözés egymásutánját egy eltolással helyettesítettük, majd azt két párhuzamos tengelyre vonatkozó tükrözés szorzatával. A harmadik középpontos tükrözés két egymásra merőleges tengelyre való tükrözés szorzata. A tükrötengelyeket úgy választjuk meg, hogy  $t_2$  átmegy  $C$ -n és merőleges  $AB$ -re,  $t_1$  a  $t_2$ -vel párhuzamos és tőle  $AB$  távolságra van.  $t_3$  a két párhuzamos tengelyre merőleges és a  $C$  ponton megy keresztül.  $D = t_1 \cap t_3$ .  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$  miatt  $ABCD$  négyszög valóban paralelogramma.

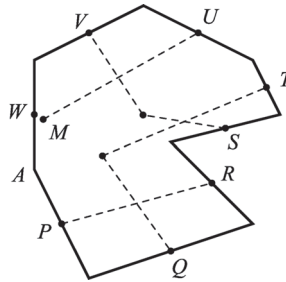




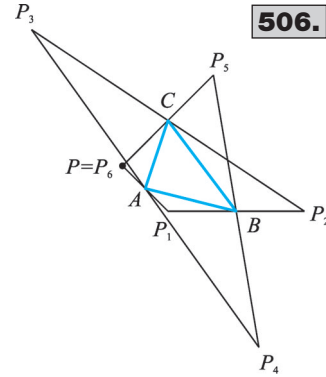
504.



505.



506.



**503.** Legyenek a középpontok rendre  $A, B, C, P$ . Az előző feladat állítását felhasználva:  
 $f_{P,180^\circ} \cdot (f_{C,180^\circ} \cdot f_{B,180^\circ} \cdot f_{A,180^\circ}) = f_{P,180^\circ} \cdot f_{D,180^\circ} = \tau_{2DP}, \tau_{2DP} = I \Leftrightarrow D \equiv P$ .

**504.** Jelölje  $P, Q, R, S, T, U, V$  az oldalfelező pontokat,  $A$  a hétszög egyik csúcsát az ábra szerint.  $A$ -t tükrözzük  $P$ -re, a tükörképet  $Q$ -ra, és így tovább  $V$ -ig, visszajutunk  $A$ -ba.

$f_{V,180^\circ} \cdot f_{U,180^\circ} \cdot f_{T,180^\circ} \cdot f_{S,180^\circ} \cdot (f_{R,180^\circ} \cdot f_{Q,180^\circ} \cdot f_{P,180^\circ}) = f_{V,180^\circ} \cdot f_{U,180^\circ} \cdot (f_{T,180^\circ} \cdot f_{S,180^\circ} \cdot f_{X,180^\circ}) = f_{V,180^\circ} \cdot f_{U,180^\circ} \cdot f_{Y,180^\circ} = f_{A,180^\circ}$ , ahol  $X$  a  $Q$  pont tükörképe  $RP$  felezőpontjára,  $Y$  az  $S$  pont tükörképe  $TX$  felezőpontjára,  $A$  az  $U$  pont tükörképe  $VY$  felezőpontjára. A transzformációk egymásutánjának fixpontja tehát  $A$ , ami a fentiek alapján megszerkeszthető, ha az oldalfelező pontok közül legfeljebb hat van egy egyenesen. Az  $A$  pont ismeretében a többi csúcspont középpontos tükrözéssel megkapható.

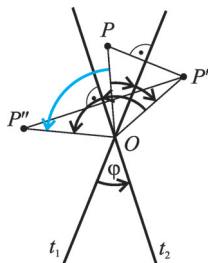
**505.** Az ábra jelöléseit használva az  $f_{W,180^\circ} \cdot f_{V,180^\circ} \cdot f_{U,180^\circ} \cdot f_{T,180^\circ} \cdot f_{S,180^\circ} \cdot f_{R,180^\circ} \cdot f_{Q,180^\circ} \cdot f_{P,180^\circ}$  transzformációsorozat  $A$ -t saját magába viszi. Az 504. feladatban láttuk, hogy a hét felezéspont-ra vonatkozó tükrözés egymásutánja egyetlen középpontos tükrözéssel helyettesíthető, így a transzformációsorozat  $f_{W,180^\circ} \cdot f_{M,180^\circ}$  lesz. Két középpontos tükrözés egymásutánja vagy nullvektortól különböző vektorral való eltolás vagy identitás. Az eltolásnak nincs fixpontja, ezért  $f_{W,180^\circ} \cdot f_{M,180^\circ} = I$  kell legyen, ami akkor és csak akkor teljesül, ha  $W \equiv M$ , azaz  $W$  egyértelműen megadható  $P, Q, \dots, U$  ismeretében.

**506.**  $\vec{PP}_2 = 2\vec{AB}, P_2\vec{P}_4 = 2\vec{CA}, P_4\vec{P}_6 = 2\vec{BC} \Rightarrow \vec{PP}_6 = 2(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = 0 \Rightarrow P \equiv P_6$ .

**507.** Legyen a  $t_1, t_2$  tengely metszéspontja  $O$ . Tetszőleges  $P$  pontra irányított szögekkel:  $\sphericalangle(PO; t_1) = \sphericalangle(t_1; P'O)$  és  $\sphericalangle(P'O; t_2) = \sphericalangle(t_2; P''O)$ .  $\sphericalangle(PO; P''O) = \sphericalangle(PO; t_1) + \sphericalangle(t_1; P'O) + \sphericalangle(P'O; t_2) + \sphericalangle(t_2; P''O) = 2 \cdot \sphericalangle(t_1; P'O) + 2 \cdot \sphericalangle(P'O; t_2) = 2 \cdot \sphericalangle(t_1; t_2)$ .

**508.** Az  $O$  pont körüli  $\alpha$  szögű forgatás során  $O' \equiv O$ , ezért a két tengely metszéspontja az  $O$  pont. Ha  $t_1$  tetszőleges  $O$  pontra illeszkedő egyenes és  $t_2$  olyan  $O$  ponton átmenő egyenes, amelynek  $t_1$  egyenessel bezárt irányított szöge  $\alpha/2$ , akkor az  $O$  pont körüli  $\alpha$  szögű forgatás helyettesíthető a  $t_1$  és  $t_2$  tengelyre vonatkozó tükrözések egymásutánjával.

507.



Szerkesztés: ① Tetszőleges  $O$ -tól különböző  $P$  pontot elforgatunk  $\alpha$  szöggel  $\rightarrow P'$ . ②  $PO$  egyenes:  $t_1$  és  $PP'$  felező merőlegese:  $t_2$ . Végtelen sok megoldás van.

**509.** a) Az  $O$  pontra vonatkozó tükrözés esetén  $O' \equiv O$ ,  $O$ -tól különböző  $P$  pontra  $P'O = PO$  és  $POP' \sphericalangle = 180^\circ$ . Ez az  $O$  pont körüli  $180^\circ$ -os forgatás definíciója.

b) Az  $O$  pont körüli  $180^\circ$ -os forgatás esetén  $O' \equiv O$ ,  $O$ -tól különböző  $P$  pontra  $P'O = PO$  és  $POP' \sphericalangle = 180^\circ \Rightarrow O$  pont felezi a  $PP'$  szakaszt. Ez az  $O$  pontra vonatkozó tükrözés definíciója.

## A háromszög nevezetes vonalai és körei

### Középvonal

**510.** A háromszög középvonala feleakkora, mint a nem felezett oldal. a) 3,5 cm; 4,5 cm; 6 cm.

b)  $\frac{1}{3}$  cm;  $\frac{2}{5}$  cm;  $\frac{7}{12}$  cm. c)  $m$ ;  $\frac{3}{2}n$ ;  $\frac{l}{4}$ . d)  $\frac{2m+3n}{2}$ ;  $\frac{2m-3n}{2}$ ;  $\frac{3}{4}m$ .

**511.** A háromszög középvonala feleakkora, mint a nem felezett oldal. A háromszög megfelelő

oldalai: a) 4 cm; 8 cm; 10 cm. b) 1 cm;  $\frac{4}{3}$  cm;  $\frac{5}{2}$  cm. c)  $m$ ;  $\frac{4n}{3}$ ;  $m+n$ .

**512.** Az  $ABC\Delta$  oldalfelező pontjai rendre  $E$ ;  $F$ ;  $D$ .  $S_4 = k_{AED} + k_{EBF} + k_{DFC} + k_{DEF}$ ;

$$S_4 = \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) = 2c + 2a + 2b = 2k_{ABC};$$

$k_{ABC} = \frac{S_4}{2}$ . a) 10 cm. b)  $\frac{15}{4}$  cm. c)  $\frac{d}{2}$  cm.

**513.**  $A$  az  $OBC\Delta$   $OB$  oldalánál felezéspontja  $\rightarrow$  az  $A$ -n át húzott párhuzamos a háromszög középvonala  $\rightarrow P$  felezi  $BC$ -t.

**514.** Legyenek a szög szárai  $a$  és  $b$ , csúcsa  $O$ . A szerkesztés: ①  $P$ -n át párhuzamos  $b$ -vel  $\rightarrow e$ . ②  $e \cap a = A$ . ③  $O \xrightarrow{A\text{-ra tükr.}} B$ . ④  $e(B; P) \cap b = C$ .  $AP \parallel OC$  és  $AO = AB$  miatt  $AP$  az  $OCB\Delta$  középvonala  $\Rightarrow P$  felezi  $BC$ -t.

**515.** A háromszög 12 cm hosszú befogójával párhuzamos középvonala az átfogó felezéspontjának távolsága a másik befogótól. A keresett távolság 6 cm.

**516.** A tető metszetháromszögének a 4,8 m hosszú oldalával párhuzamos középvonala az összekötő gerenda. Hossza 2,4 m.

**517.** Az  $R$  repülőtérről  $A_1, B_1$  pontokba jutnak fél óra alatt:  $A_1B_1 = 180$  km.  $A_2, B_2$  pontokba jutnak 1 óra múlva.  $A_1$  felezi az  $A_2R$  szakaszt,  $B_1$  felezi a  $B_2R$  szakaszt  $\Rightarrow A_1B_1$  az  $A_2B_2R\Delta$  középvonala  $\Rightarrow A_2B_2 = 360$  km.

**518.** Az  $A_iB_iC_i\Delta$  oldalfelező pontjai rendre  $E_i$ ;  $F_i$ ;  $D_i$ .

$$\left. \begin{array}{l} \underline{A_1B_1} = 2D_1F_1 = 2D_2F_2 = \underline{A_2B_2} \\ \underline{B_1C_1} = 2D_1E_1 = 2D_2E_2 = \underline{B_2C_2} \\ \underline{A_1C_1} = 2E_1F_1 = 2E_2F_2 = \underline{A_2C_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A_1B_1C_1\Delta} \cong \underline{A_2B_2C_2\Delta}.$$

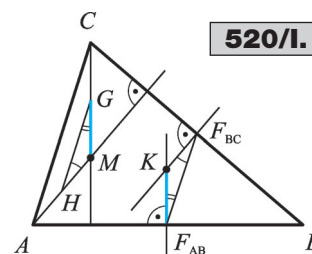
**519.** Az  $ABC\Delta$  csúcsait  $P$ -vel összekötő  $AP, BP, CP$  szakaszok felezőpontjai rendre  $E, F, D$ .  $EF$  középvonal az  $ABP\Delta$ -ben  $\Rightarrow EF = \frac{c}{2}$ .  $FD$  középvonal a  $BPC\Delta$ -ben  $\Rightarrow FD = \frac{a}{2}$ .  $ED$  közép-

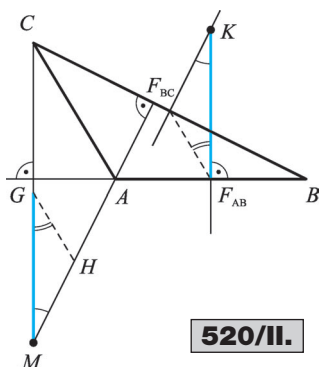
vonala az  $APC\Delta$ -ben  $\Rightarrow ED = \frac{b}{2}$ . Az  $EFD\Delta$  oldalai:  $\frac{c}{2}$ ;  $\frac{a}{2}$ ;  $\frac{b}{2}$ , tehát függetlenek  $P$  helyzetétől.

Megjegyzés: Ha  $P$  az  $A, B$  vagy  $C$  csúcsok valamelyikével megegyezik, akkor is igaz, hogy a felezéspontok által alkotott háromszög oldalai feleakkorák, mint az  $ABC$  háromszög oldalai. Ebben az esetben  $P$  maga lesz a felezéspont is.

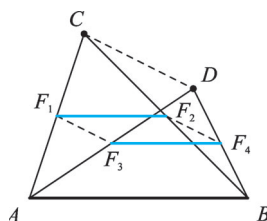
**520. 1. eset:** A háromszög hegyesszögű vagy tompaszögű. Legyen  $G$  az  $MC$  szakasz,  $H$  az  $MA$  szakasz felezéspontja!  $F_{AB}F_{BC}$

középvonal az  $ABC\Delta$ -ben  $\Rightarrow F_{AB}F_{BC} = \frac{AC}{2}$  és  $F_{AB}F_{BC} \parallel AC$ .

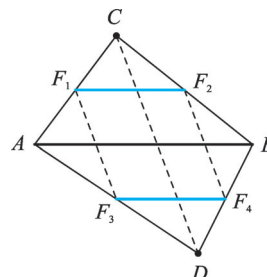




520/II.



522/I.



522/II.

$GH$  középvonal az  $AMC$   $\triangle$ -ben  $\Rightarrow GH = \frac{AC}{2}$  és  $GH \parallel AC$ .  $\Rightarrow GH = F_{AB}F_{BC}$  és  $GH \parallel F_{AB}F_{BC} \Rightarrow$  az ábrán egyformán jelölt szögek váltószögek, tehát egyenlők  $\Rightarrow GHM\triangle \cong F_{AB}F_{BC}K\triangle \Rightarrow MG = KF_{AB} \Rightarrow \underline{MC = 2KF_{AB}}$ .

**2. eset:** A háromszög derékszögű.  $KF_{AB} \parallel AC = MC$  és  $KF_{AB} = \frac{AC}{2} = \frac{MC}{2}$ .

**521.**  $P$ -t összekötjük az  $e$  egyenes  $Q_1, Q_2, Q_3$  pontjával.  $PQ_1 = Q_1R_1$  és  $PQ_2 = Q_2R_2$  miatt  $Q_1Q_2$  középvonal az  $R_1R_2P$   $\triangle$ -ben  $\Rightarrow R_1R_2 \parallel Q_1Q_2 \Rightarrow R_1R_2 \parallel e$ .

Hasonlóan megmutatható, hogy  $R_2R_3 \parallel e$ . Mivel  $R_2$ -n át  $e$ -vel csak egy párhuzamos húzható,  $R_1$  és  $R_3$  is ezen az egyetlen párhuzamoson kell legyenek. A keresett pontthalmaz egy az  $e$ -vel párhuzamos olyan egyenes, amely kétszer olyan távol van  $P$ -től, mint  $e$ .

**522.**  $F_1$  felezi  $AC$ -t,  $F_2$  felezi  $BC$ -t  $\Rightarrow F_1F_2$  középvonal az  $ABC$   $\triangle$ -ben  $\Rightarrow F_1F_2 = \frac{AB}{2}$ .  $F_3$  felezi

$AD$ -t,  $F_4$  felezi  $BD$ -t  $\Rightarrow F_3F_4$  középvonal az  $ABD$   $\triangle$ -ben  $\Rightarrow F_3F_4 = \frac{AB}{2}$ . A két következményt

összevetve:  $F_1F_2 = F_3F_4$ .  $F_1$  felezi  $AC$ -t,  $F_3$  felezi  $AD$ -t  $\Rightarrow F_1F_3$  középvonal az  $ADC$   $\triangle$ -ben  $\Rightarrow F_1F_3 =$

$= \frac{CD}{2}$ .  $F_2$  felezi  $BC$ -t,  $F_4$  felezi  $BD$ -t  $\Rightarrow F_2F_4$  középvonal az  $BCD$   $\triangle$ -ben  $\Rightarrow F_2F_4 = \frac{CD}{2}$ . A két

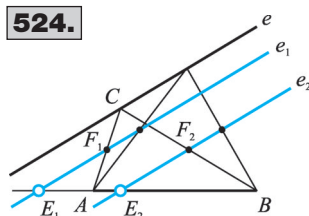
következményt összevetve:  $F_1F_3 = F_2F_4$ . Ezzel megmutattuk a két egyenlő szakaszpárt.

**523. 1. eset:**  $AB$  nem merőleges  $e$ -re és  $A$  és  $B$  közül legfeljebb az egyik van  $e$ -n.  $AB$  merőleges vetülete  $e$ -re  $A_1B_1$ .  $AB$ -t eltoljuk  $\vec{AA_1}$ -ral:  $A_1B_2$  ( $F \rightarrow F_2$ ).  $F_2F_1$  középvonala az  $A_1B_1B_2\triangle$ -nek.  $\Rightarrow F_1$  felezi  $A_1B_1$ -et.

**2. eset:**  $A \in e$  és  $B \in e$ .  $A; F; B$  fixpontok  $\Rightarrow$  az állítás igaz.

**3. eset:**  $AB \perp e$ .  $A; F; B$  képe  $T$ .

**524.**  $C \in e$ ,  $F_1$  felezi  $AC$ -t  $\Rightarrow$  az  $F_1$  pontok az  $e$ -vel párhuzamos  $e_1$  egyenesen vannak, amelyre  $d(A; e) = 2d(e_1; e)$ .  $F_2$  felezi  $BC$ -t  $\Rightarrow$  az  $F_2$  pontok az  $e$ -vel párhuzamos  $e_2$  egyenesen vannak, amelyre  $d(B; e) = 2d(e_2; e)$ .  $e_1$ , illetve  $e_2$  egyenesnek  $AB$  egyenesével való  $E_1$ , illetve  $E_2$  metszéspontja nem tartozik a pontthalmazhoz, mivel ebben az esetben  $C \in e(A; B)$  miatt nem létezik a háromszög.



524.

**525.**  $CF_c$  az  $ABC\triangle$  súlyvonala.  $FF_c$  az  $F_bF_cF_a\triangle$  súlyvonala.  $F_bF_c \parallel CF_a$  és  $F_cF_a \parallel F_bC$  miatt az  $F_bF_cF_aC$  négyszög paralelogramma  $\Rightarrow F_bF_a$  átló felezi a  $CF_c$  átlót  $\Rightarrow F_cF$  része a  $CF_c$  átlónak  $\Rightarrow F_bF_cF_a\triangle$  súlyvonala része az  $ABC\triangle$  súlyvonalának.

A másik két súlyvonala az állítás hasonlóan belátható.

Magasságvonal

**526.** Az  $ABC\Delta$  oldalfelező pontjai  $F_a; F_b; F_c$ . Az  $F_aF_bF_c\Delta$   $F_c$ -ből induló  $m_c$  magasságvonala merőleges  $F_bF_a$ -ra.  $F_bF_a \parallel AB$  miatt  $m_c \perp AB$ .  $F_c$  felezi  $AB$ -t és  $F_c \in m_c$ , így  $m_c$  az  $AB$  szakasz felező merőlegese. Hasonlóan belátható, hogy az  $F_aF_bF_c\Delta$  másik két magasságvonala is oldalfelező merőleges az  $ABC$  háromszögben. Tehát az  $F_aF_bF_c\Delta$  magasságpontja az  $ABC$  háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja, azaz körülírt körének középpontja.

**527.** a)  $\gamma = 180^\circ - 62^\circ - 43^\circ = 75^\circ$ . A beírt kör középpontja a belső szögfelezők  $O_0$  metszéspontja.  $\sphericalangle AO_0B = 180^\circ - (62^\circ : 2) - (43^\circ : 2) = \underline{127,5^\circ}$ .  $\sphericalangle BO_0C = 180^\circ - (43^\circ : 2) - (75^\circ : 2) = \underline{121^\circ}$ .  $\sphericalangle AO_0C = 360^\circ - 127,5^\circ - 121^\circ = \underline{111,5^\circ}$ .

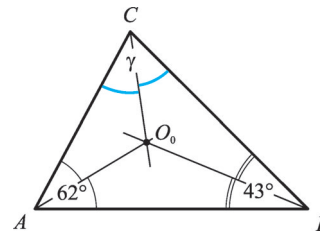
b) A háromszög hegyesszögű, ezért a magasságpont belső pont.  $\Rightarrow$  Az  $AT_aMT_c$  négyszögben  $\varphi = 360^\circ - (90^\circ + 62^\circ + 90^\circ) = \underline{118^\circ}$ . Az  $M$ -nél levő csúcsszögek miatt  $BC$  oldal  $118^\circ$ -os szögben látszik a magasságpontból. Ennek mintájára belátható, hogy  $\sphericalangle AMC = \underline{137^\circ}$  és  $\sphericalangle AMB = \underline{105^\circ}$

**528.** Legyen  $D$  magasságpont az  $ABC\Delta$ -ben  $\Rightarrow$  I.  $CD \perp AB$ , II.  $AD \perp BC$ , III.  $BD \perp AC$ . Megmutatjuk, hogy  $A$  magasságpont a  $BCD\Delta$ -ben:  $AB \perp CD$  az I. feltétel miatt,  $AC \perp BD$  a III. feltétel miatt,  $AD \perp BC$  a II. feltétel miatt.  $AB, AC$  és  $AD$  magasságvonalak a  $BCD\Delta$ -ben, tehát  $A$  a magasságpont ebben a háromszögben. A másik két állítás hasonlóan belátható. Megjegyzés: A gondolatmenet nem függ a  $D$  pont helyzetétől.

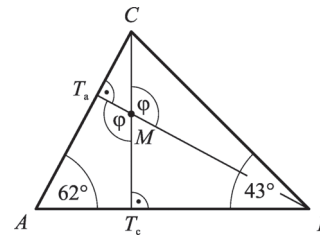
**529.** A szerkesztés: ① Húzzunk párhuzamost  $M$ -en át  $h$ -val:  $h' \Rightarrow h' \cap c = A$ . ② Húzzunk párhuzamost  $M$ -en át  $e$ -vel:  $e' \Rightarrow e' \cap c = B$ . ③ Húzzunk párhuzamost  $A$ -n át  $f$ -fel:  $f' \Rightarrow f' \perp e'$ . ④ Húzzunk párhuzamost  $B$ -n át  $g$ -vel:  $g' \Rightarrow g' \perp h'$ . Legyen  $f' \cap g' = C \Rightarrow h'$  az  $ABC\Delta$   $A$ -ből induló magasságvonala,  $e'$  az  $ABC\Delta$   $B$ -ből induló magasságvonala  $\Rightarrow h' \cap e' = M$  az  $ABC\Delta$  magasságpontja  $\Rightarrow MC$  az  $ABC\Delta$   $C$ -ből induló magasságvonala  $\Rightarrow MC \perp c$ .

**530.**  $\left. \begin{matrix} m_b \perp b \\ m_a \perp a \end{matrix} \right\} \Rightarrow m_a \cap m_b = P$  az  $ABM\Delta$  magasságpontja  $\left. \begin{matrix} m \perp AB \\ P \in m \end{matrix} \right\} \Rightarrow m$  az  $ABM\Delta$  harmadik magasságvonala, tehát átmegy a háromszög harmadik csúcsán,  $M$ -en.

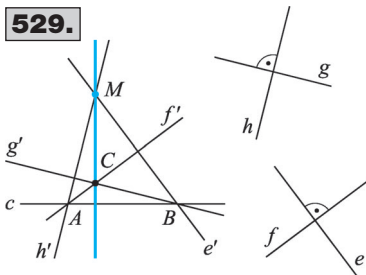
527/I.



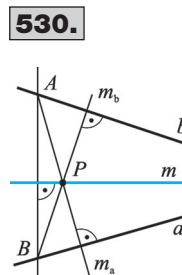
527/II.



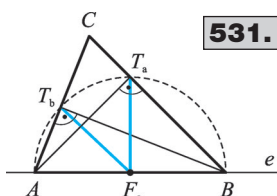
529.



530.



## Thalész-kör



531.

**531.**  $T_b$  és  $T_a$  pontokból az  $AB$  szakasz derékszög alatt látszik  $\Rightarrow \Rightarrow T_b$  és  $T_a$  rajta vannak az  $AB$  szakasz Thalész körén, melynek középpontja  $F_c$ .  $\Rightarrow F_c T_b = F_c T_a$ , hiszen a fenti Thalész-kör két sugaráról van szó.

**532.** A 531. ábra jelöléseit használhatjuk. Felhasználjuk: I.  $T_a$  és  $T_b$  pontok rajta vannak az  $AB$  szakasz Thalész körén. II. A húrfelező merőleges átmegy a kör középpontján.

A szerkesztés: ①  $T_b T_a$  szakaszfelező merőlegese  $\rightarrow f$ . ②  $f \cap e = F_c$ .

③  $F_c$  középpontú  $F_c T_a$  sugarú kör  $\rightarrow k_T$ . ④  $k_T \cap e = \{A; B\}$ . ⑤  $e(A; T_b) \cap e(B; T_a) = C$ . 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

**533.** Az  $AB$  szakasz  $A_1$  és  $B_1$  pontból is derékszög alatt látszik  $\Rightarrow$  bármely  $ABC\Delta$  ( $C \notin AB$ ) esetén az  $A_1$  és  $B_1$  magasságtalppontok rajta vannak  $AB$  Thalész körén. A Thalész-körnek bármely,  $A$ -tól és  $B$ -től különböző alkalmas pontpárjához egyértelműen tartozik háromszög.  $AB_1 \cap BA_1 = C$  mindig létezik (bármely  $A_1 \in k$ -hoz létezik  $B_1 \in k$ , hogy  $AB_1$  és  $A_1 B$  ne legyenek párhuzamosak). Tehát  $AB$  mint átmérő fölé rajzolt kör pontjai tartoznak a pontthalmazba,  $A$  és  $B$  kivételével.

**534.** A szerkesztés: ①  $AB$  szakasz felezőpontja  $F_c$ . ②  $F_c$  középpontú  $F_c B$  sugarú Thalész-kör  $\rightarrow k_T$ . ③  $k_T \cap e = C$ . 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

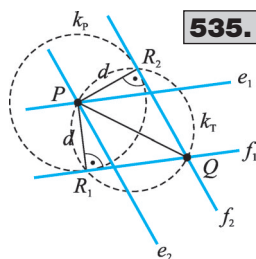
**535.** A szerkesztés: ①  $PQ$  szakasz Thalész köre  $\rightarrow k_T$ . ②  $P$  középpontú  $d$  sugarú kör  $\rightarrow k_P$ . ③  $k_T \cap k_P = R$ . ④  $e(R; Q) = f$  egyenes. ⑤  $P$ -n át párhuzamos  $f$ -fel  $\rightarrow e$ . 0 vagy 1 vagy 2 megoldás van.

**536.** Az  $ABC\Delta$  körülírt körének középpontja az  $AB$  átfogó  $F_c$  felezőpontja.  $AF_c$ ,  $BF_c$  és  $CF_c$  ennek a Thalész-körnek a sugarai  $\Rightarrow AF_c = BF_c = CF_c$ . Mivel  $F_c$  felezi  $AB$ -t,  $AF_c = BF_c = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \Rightarrow CF_c = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \underline{\underline{AB = 2CF_c}}$ .

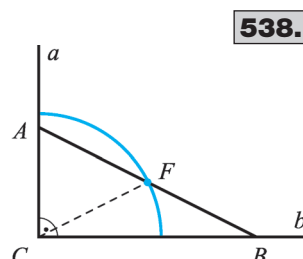
**537.**  $F_a F_c$  középvonal az  $ABC\Delta$ -ben  $\Rightarrow F_a F_c = \frac{1}{2} AC$  (1).  $T_a$  pontból az  $AC$  szakasz derékszög alatt látszik  $\Rightarrow T_a$  rajta van az  $AC$  szakasz Thalész körén  $\Rightarrow F_b T_a = \frac{1}{2} AC$  (2). (1) és (2) összehasonlításából  $F_a F_c = F_b T_a$ . **1. eset:** Ha  $T_a \equiv F_a$ , akkor  $F_b F_c F_a \Delta$  egyenlő szárú.

**2. eset:** Ha  $T_a \neq F_a$ , akkor  $F_b F_c$  középvonal az  $ABC\Delta$ -ben  $\Rightarrow F_b F_c \parallel BC \Rightarrow F_b F_c \parallel T_a F_a$ .  $\Rightarrow F_b F_c F_a T_a$  trapéz.  $F_b T_a = F_c F_a$  és  $F_b T_a$  nem párhuzamos  $F_c F_a$  ( $T_a \notin AC$ )  $\Rightarrow F_b F_c F_a T_a$  húrtrapéz.

**538.** A Thalész-tétel miatt  $FC = \frac{1}{2} d$  bármely  $F$  felezőpont esetén  $\Rightarrow$  az  $F$  pont rajta van a  $C$  középpontú  $\frac{1}{2} d$  sugarú körön. A derékszög tartományába eső negyedkörvonal minden pont-



535.



538.

ja előáll felezőpontként. Az  $a$  és  $b$  szárakra eső körpontok is megfelelnek, mert ilyenkor  $AB$  az  $a$  vagy a  $b$  száron van. A szakaszfelező pontok tehát a derékszög szárai között elhelyezkedő negyedkörvonalat írják le.

**539.** A feltétel szerint  $AC = CD$ . A Thalész-tétel miatt  $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CDB \Rightarrow CB$  az  $AD$  szakasz felező merőlegese  $\Rightarrow CB$  az  $ABD\Delta$  szimmetriatengelye  $\Rightarrow \underline{AB = BD}$ .

**540.** Legyen  $Q$  a  $PN$  szakasz és a kör közös pontja. A Thalész-tétel miatt  $\sphericalangle MQN = \sphericalangle MPN$ .  $MQ$  az  $NPM$  egyenlő szárú háromszög  $NP$  alaphoz tartozó magassága  $\Rightarrow Q$  felezi  $NP$ -t.

**541.** Az  $AC$  szár, mint átmérő fölé írt kör  $Q$ -ban metszi az  $AB$  alapot. A Thalész-tétel miatt  $\sphericalangle AQC = \sphericalangle APC$ .  $CQ$  az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága  $\Rightarrow Q$  felezi  $AB$ -t.

**542.** A  $CF_c$  átmérőjű kör  $AC$ -t  $Q$ -ban,  $BC$ -t pedig  $P$ -ben metszi. A Thalész-tétel miatt  $\sphericalangle F_cQC = \sphericalangle F_cPC \Rightarrow \sphericalangle AQC = \sphericalangle BPC$ . Az  $AQF_c\Delta$ -ben  $60^\circ$  és  $30^\circ$  a hegyesszögek  $\Rightarrow AQ = \frac{1}{2} AF_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AB = \frac{1}{4} AB$ . Hasonlóan belátható, hogy  $BP = \frac{1}{4} BC$ .

**543.**  $AB$  átmérőjű kör  $\rightarrow k_c$ .  $AC$  átmérőjű kör  $\rightarrow k_b$ .  $k_c \cap k_b = A_1$ .  $A_1$ -ből az  $AB$  és az  $AC$  szakasz is derékszög alatt látszik, (ill.  $c$ ) esetben  $A_1 \equiv C \Rightarrow A_1 \in e(C; B) \Rightarrow k_c$  és  $k_b$  közös húregyenes az  $ABC\Delta$ -ből induló magasságvonal. Hasonlóan belátható, hogy  $k_a$  és  $k_b$  közös húregyenes a  $C$ -ből induló,  $k_a$  és  $k_c$  közös húregyenes a  $B$ -ből induló magasságvonal. A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást  $\Rightarrow$  a fenti körök húregyenesei is egy ponton mennek át.

**544.** A  $C$  csúcs és az  $M$  magasságpont által meghatározott szakasz Thalész körét vizsgáljuk. **1. eset:** Az  $ABC\Delta$ -ben az  $\sphericalangle ACB \neq 90^\circ \Rightarrow C \neq M \Rightarrow MC$  fölé nem rajzolható Thalész-kör.

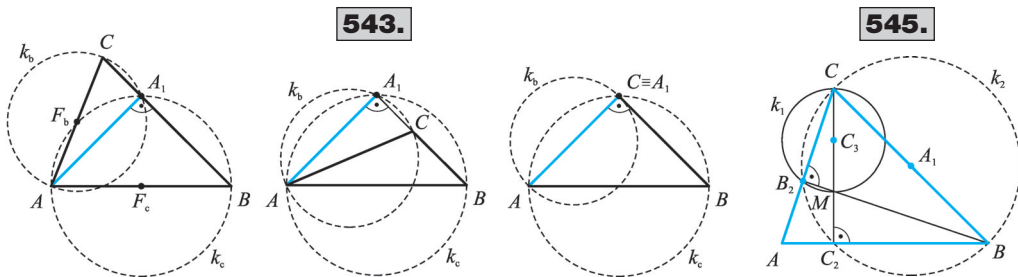
**2. eset:** Az  $ABC\Delta$ -ben  $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ .  $k$  az  $MC$  szakasz Thalész köre;  $k \cap e(C; B) = A_1$ ;  $k \cap e(C; A) = B_1$ .  $A_1$  rajta van  $CM$  Thalész körén  $\Rightarrow \sphericalangle CA_1M = 90^\circ \Rightarrow MA_1$  része az  $A$ -ből induló magasságvonalnak  $\Rightarrow A_1$  az  $A$ -ből induló magasságvonal talppontja. Hasonlóan belátható, hogy  $B_1$  a  $B$ -ből induló magasságvonal talppontja.

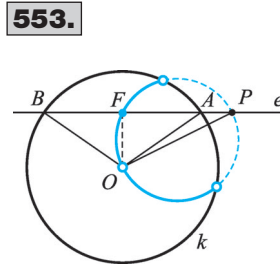
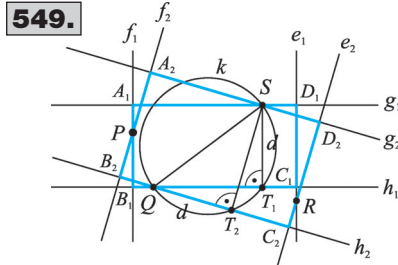
**545.** Felhasználjuk, hogy  $BB_2 \perp AC$ , ezért  $B_2$  rajta van  $CM$ , illetve  $CB$  Thalész körén. Szerkesztés: ①  $C_3$  középpontú,  $C_3B_2$  sugarú kör:  $k_1$ . ②  $A_1$  középpontú,  $A_1B_2$  sugarú kör:  $k_2$ . ③  $k_1 \cap k_2 = C$ . ④  $C$  tükörképe  $A_1$ -re:  $B$ . ⑤  $e(C; C_3) \cap k_2 = C_2$ . ⑥  $e(B; C_2) \cap e(C; B_2) = A$ . 0 vagy 1 megoldás lehet.

**546.** Az  $O_1$  középpontú  $k_1$  körnek és az  $O_2$  középpontú  $k_2$  körnek az érintési pontja  $E$ .  $A_1B_1$  átmérő  $k_1$ -ben,  $A_1E$  a  $k_2$ -ből  $A_2$ -t,  $B_1E$  pedig  $B_2$ -t metszi ki. **1. eset:** Kívülről érintkező körökre: Thalész-tétel miatt  $\sphericalangle A_1EB_1 = 90^\circ$ .  $\sphericalangle A_1EB_1 = \sphericalangle A_2EB_2$  és  $\sphericalangle A_2EB_2 = 90^\circ$ . Thalész-tétel megfordítása miatt  $O_2 \in A_2B_2$ .

**2. eset:** Belülről érintő körre: Thalész-tétel miatt  $\sphericalangle A_1EB_1 = 90^\circ$ .  $\sphericalangle A_1EB_1 = \sphericalangle A_2EB_2$  szöggel. Thalész-tétel megfordítása miatt  $O_2 \in A_2B_2$ .

**547.** Legyen az  $ABC\Delta$  köré írható kör középpontja  $O$ ; az  $OA$  Thalész köre pedig  $k_r$ . Legyen  $k_r \cap AB = E$  és  $k_r \cap AC = F$ ! Thalész-tétel miatt  $\sphericalangle AEO = 90^\circ$ .  $OE \perp AB$  miatt  $OE$  az  $AB$  szakasz felezőmerőlegese, hiszen a körülírt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.





$O$ -ból  $AB$ -re csak egy merőleges állítható, tehát annak a felezésponton kell átmennie.  $\Rightarrow E$  felezi  $AB$ -t. Hasonlóan belátható, hogy  $F$  felezi  $AC$ -t.

**548.**  $AB$  a két kör közös húrja;  $AC$  átmérő a  $k_1$  körben;  $AD$  átmérő a  $k_2$  körben. **1. eset:**  $B \neq D$ . A Thalész-tétel miatt  $\sphericalangle CBA = \sphericalangle DBA \Rightarrow C, B$  és  $D$  egy egyenesen vannak.

**2. eset:**  $B \equiv D$ . Az állítás ebben az esetben nyilvánvaló.

**549.** A szerkesztés: ①  $SQ$  Thalész köre  $\rightarrow k$ . ② Az  $S$  középpontú  $d$  sugarú körnek  $k$ -val való metszéspontja  $T_1$ ; a  $Q$  középpontú  $d$  sugarú kör  $k$ -val való metszéspontja  $T_2$ . Elegendő  $PS$  egyik félsíkjaiban rajzolni. ③  $ST_1$ -vel párhuzamos  $R$ -en át  $\rightarrow e_i$ .  $ST_2$ -vel párhuzamos  $P$ -n át  $\rightarrow f_i$ .  $Q$ -ban merőleges  $f_i$ -re  $\rightarrow h_i$ .  $S$ -ben merőleges  $f_i$ -re  $\rightarrow g_i$ . ④  $e_i \cap g_i = D_i$ ;  $e_i \cap h_i = C_i$ ;  $f_i \cap g_i = A_i$ ;  $f_i \cap h_i = B_i$ . 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehetséges.

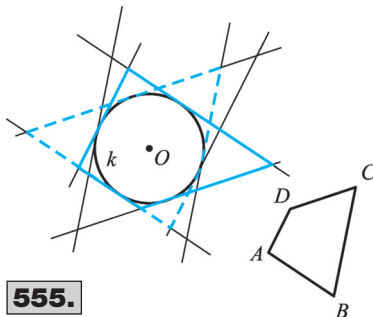
**550.** Egy tetszőleges,  $P$ -n áthaladó  $e$  egyenesen a  $Q$  talppont rajta van a  $TP$  szakasz Thalész körén. E Thalész-körnek bármely  $T$ -től és  $P$ -től különböző pontja egyértelműen meghatározza a hozzá tartozó egyenest. A keresett pontthalmaz a  $PT$  szakasz mint átmérő fölé rajzolt kör a  $P$  és  $T$  pontok kivételével.

**551.** A rombusz átlói merőlegesek egymásra, ezért az átlók  $M$  metszéspontja mindig rajta lesz a rögzített  $AB$  szakasz Thalész körén. A Thalész-kör minden pontjához megadható egy rombusz az  $A$ , ill.  $B$  pontok  $M$ -re való tükrözésével. A keresett pontthalmaz az  $AB$  átmérőjű kör, az  $A$  és  $B$  pontok kivételével.

**552.** Legyen az  $AB$  húr és az  $OB$  sugár Thalész körének metszéspontja  $Q$ .  $Q$  rajta van  $OB$  szakasz Thalész körén, ezért  $\sphericalangle OQB = 90^\circ$ .  $OQ$  az  $AOB$  egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága  $\Rightarrow Q$  felezi  $AB$ -t.

**553.**  $AOB\Delta$  egyenlő szárú  $\Rightarrow OF \perp AB \Rightarrow OF \perp FP$ .  $F$  rajta van  $OP$  Thalész körén. A Thalész-kör  $k$ -n belüli bármely  $F$  pontja egyértelműen meghatároz egy  $P$ -n átmenő húr, aminek  $F$  a felezőpontja. Kivétel ez alól a  $P$  és  $O$  pont. A keresett pontthalmaz az  $OP$  átmérőjű kör  $k$ -n belüli része, az  $O$  és  $P$  pontokat kivéve.

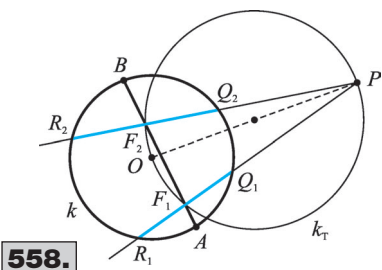
### A háromszög beírt és hozzáírt körei



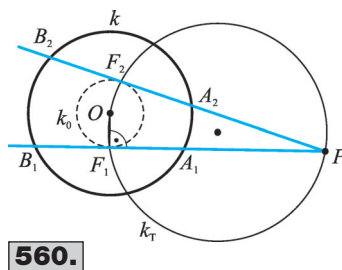
**554.** Felhasználjuk: az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre. A szerkesztés: ①  $O$ -ból merőleges  $e$ -re  $\rightarrow m$ . ②  $m \cap k = \{E_1; E_2\}$ . ③  $E_1$ -en át párhuzamos  $e$ -vel  $\rightarrow f_1$ . ④  $E_2$ -n át párhuzamos  $e$ -vel  $\rightarrow f_2$ . Két megoldás van.

**555.** A szerkesztés: ① A megadott négyszög különböző oldalégyeneseit kiválasztva megszerkesztjük a  $k$  körhöz a kiválasztott oldalégyenesekkel párhuzamos érintőket (l. 554. feladat). ② Az érintők közül úgy választunk oldalégyeneseket, hogy azok körülfogják a kört.

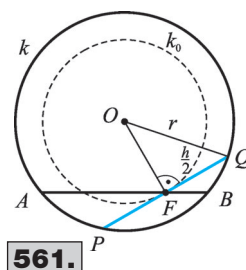
**556.**  $OP = 3$  cm.  $P$ -n áthaladó egyenest szerkesztünk, ami  $O$ -tól 2 cm távolságra halad. A szerkesztés: ①  $O$  kö-



558.



560.



561.

zéppontú 2 cm sugarú kör  $\rightarrow k$ . ②  $OP$  Thalész köre  $\rightarrow k_T$ . ③  $k_T \cap k = \{E_1; E_2\}$ . ④  $e(P; E_1) = e_1$ ;  $e(P; E_2) = e_2$ .

**557.** Adott:  $O$ ;  $P$  és  $e$  távolság. Felhasználjuk: Az érintési pont rajta van a középpont és a külső pont fölé rajzolt Thalész-körön. A szerkesztés: ①  $OP$  Thalész köre  $\rightarrow k_T$ . ②  $P$  középpontú  $e$  sugarú kör  $\rightarrow k_p$ . ③  $k_T \cap k_p = \{E_1; E_2\}$ . ④  $O$  középpontú,  $OE_1$  sugarú kör  $\rightarrow k$ . Nincs megoldás, ha  $e \geq OP$ , 1 megoldás van egyébként.

**558.** Olyan  $PR$  egyenest keresünk, amelyre  $RF = FQ$ .  $F$  felezi  $RQ$ -t  $\Rightarrow OFQ \sphericalangle = \sphericalangle \Rightarrow F$  rajta van  $OP$  Thalész körén. A szerkesztés: ①  $OP$  Thalész köre  $\rightarrow k_T$ . ②  $k_T \cap AB = F$ . ③  $e(P; F)$  a megoldás. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

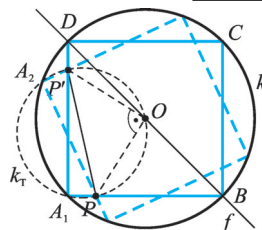
**559.** Az  $O$  középpontú kör  $h$  hosszúságú  $AB$  húrjának felezőpontja legyen  $F$ .  $FOB$  derékszögű háromszög átfogója  $r$ , egyik befogója  $FB = \frac{h}{2}$ . A másik befogó Pitagorasz-tétellel  $FO = \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$  = állandó. Az egyenlő húrok  $F$  felezéspontjai az  $O$  középpontú  $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$  sugarú körön vannak. E kör minden pontjához egyértelműen egy  $h$  hosszúságú húr tartozik. A keresett pontthalmaz egy  $k$ -val koncentrikus  $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$  sugarú kör.

**560.** Felhasználjuk:  $OF \perp BA \Rightarrow OFP \sphericalangle = \sphericalangle$ . Az  $AB$  húr  $F$  felezéspontja  $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$  távolságra van  $O$ -tól (559. feladat). A szerkesztés: ①  $OP$  Thalész köre  $\rightarrow k_T$ . ②  $O$  középpontú  $OF$  sugarú kör  $\rightarrow k_0$ . ③  $k_0 \cap k_T = F$ . ④  $e(P; F) \cap k = \{A; B\}$ . Két megoldás van.

**561.** Felhasználjuk:  $F$  felezi  $PQ$ -t  $\Rightarrow OFQ \sphericalangle = \sphericalangle$ . Az  $OFQ$  derékszögű háromszög  $OQ$  átfogója  $r$ ,  $FQ$  befogója  $\frac{h}{2} \Rightarrow OF$  befogó hossza megszerkeszthető. A szerkesztés: ① Az előzetesen megszerkesztett  $OF$  távolsággal mint sugárral  $O$  középpontú kör  $\rightarrow k_0$ . ②  $k_0 \cap AB = F$ . ③  $F$ -ben merőleges  $OF$ -re  $\rightarrow$  a keresett húr egyenese. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

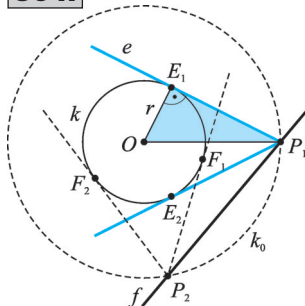
**562.** Felhasználjuk: a négyzet forgásszimmetrikus az  $O$  körüli  $90^\circ$ -os elforgatásra. A szerkesztés: ①  $P$ -t elforgatjuk  $O$  körül  $90^\circ$ -kal  $\rightarrow P'$ . ②  $PP'$  Thalész köre  $\rightarrow k_T$ . ③  $k_T \cap k = A$ . ④  $A$ -t középpontosan tükrözzük  $O$ -ra  $\rightarrow C$ . ⑤  $AC$  felező merőlegese  $\rightarrow f$ . ⑥  $f \cap k = \{B; D\}$ . 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

**563.** Az  $AB$  átmérő meghosszabbításán helyezkedik el  $P$ , amelyből a körhöz húzott érintők érintési pontjai  $E_1$  és  $E_2$ . Az  $OE_1P$  derékszögű háromszögben ismerjük az  $OE_1 = r$  befogót. Egy segédábrán



562.

564.



az  $OP$  átfogó hossza megszerkeszthető.  $O$ -ból mindkét irányba felmérjük  $AB$  egyenesére a megszerkesztett  $OP$  távolságot. Két megoldás van.

**564.** Az  $OPE$  derékszögű háromszög két ismert befogójából az  $OP$  távolság megszerkeszthető. A  $P$  pont rajta van az  $O$  középpontú  $OP$  sugarú körön  $\rightarrow k_0$ .  $k_0 \cap f = P$ . 0 vagy 1 vagy 2 megoldás van.

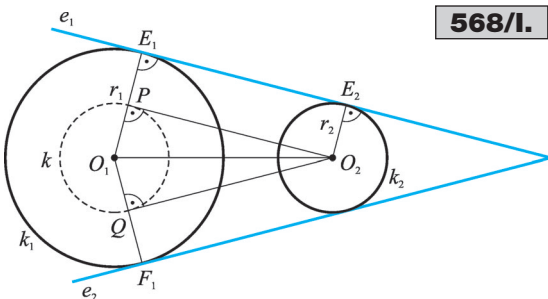
**565.** Az  $O$  középpontú körhöz  $P$ -ből húzott érintők érintési pontjai  $E_1$  és  $E_2$ .  $E_1PE_2 \sphericalangle = 60^\circ \Rightarrow E_1PO \sphericalangle = 30^\circ \Rightarrow E_1OP$  derékszögű háromszögben  $OP = 2OE_1 = 2r$ . A keresett  $P$  pontok egy  $O$  középpontú  $2r$  sugarú körön vannak. E kör minden pontja megfelel a feltételeknek. A keresett ponthalmaz a  $k$ -val koncentrikus  $2r$  sugarú kör.

**566.** Az  $O$  középpontú körhöz  $P$ -ből húzott érintők érintési pontjai  $E_1$  és  $E_2$ .  $E_1PE_2 \sphericalangle = \Rightarrow \Rightarrow OE_1PE_2$  négyszög egy  $r$  oldalú négyzet  $\Rightarrow$  a  $P$  pontok egy  $O$  középpontú  $r\sqrt{2}$  sugarú körön vannak. A szerkesztés: ①  $r$  oldalú négyzet átlója  $\rightarrow r\sqrt{2}$  hosszúságú szakasz. ②  $O$  középpontú  $r\sqrt{2}$  sugarú kör  $\rightarrow k_0$ . ③  $k_0 \cap f = P$ . 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

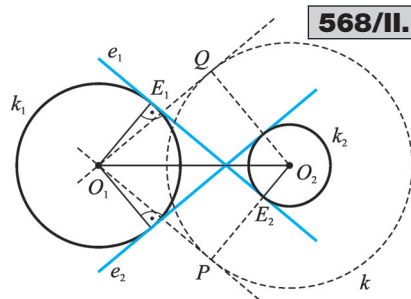
**567.** Legyen a két kör közös húrja  $AB$ , ami átmérő  $k$ -ban. A keresett körök  $K$  középpontjaira az  $AOK$  derékszögű háromszögben  $OK = \sqrt{R^2 - r^2}$ . A  $K$  középpontok egy  $O$  középpontú  $\sqrt{R^2 - r^2}$  sugarú körön vannak. E kör minden pontja megfelel. A ponthalmaz egy  $k$ -val koncentrikus  $\sqrt{R^2 - r^2}$  sugarú kör, ha  $R > r$ ; nincs ilyen pont, ha  $R \leq r$ .

**568.** a) Két kör közös külső érintőinek meghatározása: **1. eset:** A két kör sugara egyenlő.  $O_1$ -ben és  $O_2$ -ben merőlegest állítunk a körök centrálisára. Ezeknek a körökkel való  $E_1, F_1$ , ill.  $E_2, F_2$  metszéspontjai lesznek az érintési pontok.  $E_1E_2$  egyenese az egyik,  $F_1F_2$  egyenese a másik érintő. **2. eset:** A két kör sugara különböző: Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért az  $O_1E_1E_2O_2$  négyszög derékszögű trapéz. Húzzunk párhuzamost  $O_2$ -n át  $E_1E_2$ -vel  $\rightarrow O_1O_2P$  derékszögű háromszög, melynek  $O_1P$  befogója  $(r_1 - r_2)$  hosszú,  $O_2P$  befogója pedig párhuzamos a szerkesztendő érintővel. Az  $O_2$  pontból érintőt szerkesztünk az  $O_1$  középpontú  $(r_1 - r_2)$  sugarú körhöz  $\rightarrow P, Q$ .  $O_1P$  félegyenesnek  $k_1$ -gyel való metszéspontja  $E_1$ .  $O_1Q$  félegyenesnek  $k_1$ -gyel való metszéspontja  $F_1$ .  $E_1$ -ben merőleges  $O_1E_1$ -re  $\rightarrow e_1$  érintő.  $F_1$ -ben merőleges  $O_1F_1$ -re  $\rightarrow e_2$  érintő.

b) Két kör közös belső érintőjének megszerkesztése: Toljuk el az  $e_1$  érintőt az  $\vec{E_1O_1}$  eltolásvektorral ( $E_1O_1 \perp e_1, E_1O_1 = r_1$ )  $\Rightarrow E_1$  képe  $O_1, E_2$  képe  $P$ . Szerkesztünk érintőt  $O_1$ -ből az  $O_2$  középpontú  $(r_1 + r_2)$  sugarú  $k$  körhöz  $\rightarrow P, Q$ . Toljuk el az  $O_1P$  érintőt  $O_1P$ -re merőlegesen a  $k_2$  kör felé  $r_1$  távolsággal. Ez az eltolás az  $O_1P$  egyenest a  $k_1$  és  $k_2$  körök egyik közös belső érintőjébe viszi. Hasonlóan járunk el az  $O_1Q$  egyenessel. Így a másik közös belső érintőhöz jutunk.

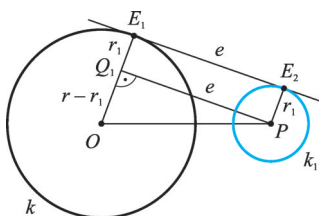


568/I.

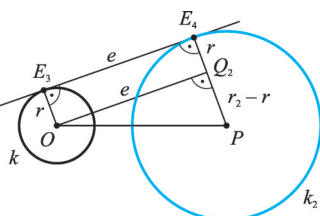


568/II.

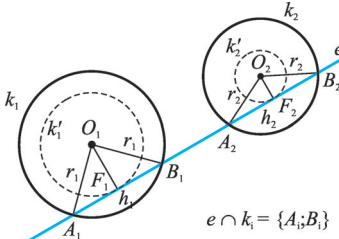
570/I.



570/II.



571.



Megjegyzések: I. A belső érintő megszerkesztésénél nincs szükség az  $r_1 = r_2$  eset különválasztására. II. Két körnek akkor létezik közös belső érintője, ha  $r_1 + r_2 \geq O_1O_2$ . Egyenlőség esetén egy közös belső érintő van. III. Két körnek akkor létezik közös külső érintője, ha egyik sem tartalmazza a másikat.

**569.** A szerkesztés: ①  $O_1$  középpontú 2 cm sugarú kör  $\rightarrow k_1$ . ②  $O_2$  középpontú 1 cm sugarú kör  $\rightarrow k_2$ . ③  $k_1$ -hez és  $k_2$ -höz a közös belső és külső érintők megszerkesztése.

**570. 1. eset:** Ha  $e < OP$ , akkor a szerkesztendő kör sugara kisebb is és nagyobb is lehet az adott kör sugaránál. a) A szerkesztendő kör sugara kisebb az adott kör sugaránál. Felhasználjuk: Az  $E_1E_2$  közös külső érintő a  $Q_1P$  szakasz  $\vec{PE}_2$  vektorral való eltolt képe.

A szerkesztés: ①  $e, OP, \rightarrow OPQ_1\Delta$ . ②  $r - OQ_1 = r_1$ . ③  $P$  középpontú  $r_1$  sugarú kör  $\rightarrow k_1$ .

b) A szerkesztendő kör sugara nagyobb az adott kör sugaránál. Felhasználjuk: Az  $E_3E_4$  közös külső érintő a  $OQ_2$  szakasz  $\vec{OE}_3$  vektorral való eltolt képe. A szerkesztés: ①  $e, OP, \rightarrow OPQ_2\Delta$ .

②  $r + PQ_2 = r_2$ . ③  $P$  középpontú  $r_2$  sugarú kör  $\rightarrow k_2$ .

**2. eset:** Ha  $e = OP$ , akkor  $P$  középpontú  $r$  sugarú kör a megoldás.

**3. eset:** Ha  $e > OP$ , akkor nincs megoldás.

**571.** Felhasználjuk: A  $k_1$  kör  $h_1$  hosszúságú húrjainak  $F_1$  felezőpontjai az  $O_1$  középpontú

$\sqrt{r_1^2 - \frac{h_1^2}{4}}$  sugarú  $k'_1$  körön vannak (559. feladat). Hasonló igaz a  $k_2$  kör  $h_2$  hosszú húrjaira is  $\rightarrow$

$\rightarrow k'_2$ .  $O_1F_1 \perp A_1B_1 \Rightarrow O_1F_1 \perp e$ .  $O_2F_2 \perp A_2B_2 \Rightarrow O_2F_2 \perp e$ . A keresett  $e$  szelő a  $k'_1$  és  $k'_2$  körök közös

érintője. A szerkesztés: ①  $O_1$  középpontú  $\sqrt{r_1^2 - \frac{h_1^2}{4}}$  sugarú kör  $\rightarrow k'_1$ .

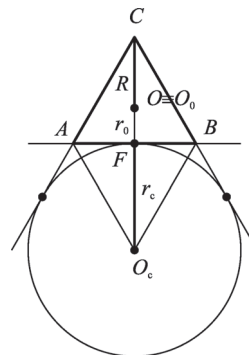
②  $O_2$  középpontú  $\sqrt{r_2^2 - \frac{h_2^2}{4}}$  sugarú kör  $\rightarrow k'_2$ . ③  $k'_1$  és  $k'_2$  körök közös

külső és belső érintőinek megszerkesztése. 0; 1; 2; 3 vagy 4 egyenes lehetséges.

**572.** Egyenlő oldalú háromszögben a beírt kör középpontja és a körülírt kör középpontja megegyezik a súlyponttal. A  $CF$  súlyvonalon  $CS = 2SF$ .  $CS$  a körülírt kör sugara:  $R$ .  $SF$  a beírt kör sugara:  $r_0$ . Az aláhúzott állításba beírva:  $R = 2r_0$ .

**573.** Szabályos háromszögben a beírt kör középpontja azonos a súlyponttal  $\Rightarrow O_0C = 2r_0$ .  $ABO_0\Delta \cong ABC\Delta$ , mivel  $O_c$  az  $A$ -nál és  $B$ -nél levő  $120^\circ$ -os külső szögek felezőinek metszéspontja  $\Rightarrow FO_c = FC \Rightarrow r_c = 3r_0$ .

573.



**574.** Az 573. ábra jelöléseit használjuk.  $ABO_c\Delta \cong ABC\Delta$ , mivel  $O_c$  az  $A$ -nál és  $B$ -nél levő  $120^\circ$ -os külső szögek felezőinek metszéspontja  $\Rightarrow FO_c = FC$ . A szabályos háromszög körülírt

körének középpontja egybeesik a súlyponttal:  $R = \frac{2}{3} FC = \frac{2}{3} FO_c = \frac{2}{3} r_c$ .

**575.** Legyen az  $ABC\Delta$   $c$  oldalához írt kör középpontja  $O_c$ . Felhasználjuk:  $ABO_c\Delta \cong ABC\Delta$ , mivel  $O_c$  az  $A$ -nál és  $B$ -nél levő  $120^\circ$ -os külső szögek felezőinek metszéspontja. A szerkesztés: ①  $k_c$  egy átmérője  $\rightarrow f$  egyenes,  $F$  pont. ②  $O_c$ -t tükrözzük  $F$ -re  $\rightarrow C$ . ③  $C$ -ben  $+30^\circ$ -os és  $(-30^\circ)$ -os szög felvétele az  $f$  egyenesre  $\rightarrow b$  és  $a$ . ④  $F$ -ben merőleges  $f$ -re  $\rightarrow c$ . ⑤  $b \cap c = A$ ;  $a \cap c = B$ . A feladat egyértelműen megoldható.

**576.** Legyenek az  $ABC\Delta$   $a, b, c$  oldalaihoz írt körök középpontjai rendre  $O_a, O_b, O_c$ . Felhasználjuk: adott csúcsnál levő belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra. Az  $O_c O_b O_c \Delta$  oldalai az  $ABC$  háromszög külső szögfelezői. Az  $O_c C$  szakasz rajta van a  $\gamma$  szög felezőjén, tehát merőleges  $a \gamma'$  külső szög szögfelezőjére  $\Rightarrow f_\gamma$  belső szögfelező az  $O_a O_b O_c \Delta$   $O_c$ -ből induló magasságvonala. Hasonlóan megmutatható, hogy  $f_a$  az  $O_a$ -ból induló,  $f_b$  az  $O_b$ -ből induló magasságvonal az  $O_a O_b O_c \Delta$ -ben.

**577.** Felhasználjuk: külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő.

$AE = AG = x \Rightarrow EB = c - x \Rightarrow FB = c - x$ .  $GC = b - x \Rightarrow CF = b - x$ .  $a = CF + FB = b - x + c - x = b + c - 2x \Rightarrow x = \frac{b+c-a}{2} = \frac{b+c+a}{2} - a = s - a$ , ahol  $s$  a félkerület  $\Rightarrow \underline{\underline{AE = AG = s - a}}$ ;  $\underline{\underline{FB = EB = c - x = s - b}}$ ;  $\underline{\underline{CF = CG = b - x = s - c}}$ .

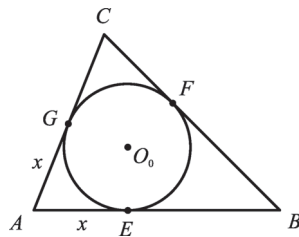
**578.** Felhasználjuk: külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő.  $CE = CG$ ,  $AE = AF$ ,  $BG = BF$ ,  $CE + CG = (CA + AE) + (CB + BG) = CA + AF + CB + BF = CA + CB + (AF + BF) = CA + CB + AB = k_{ABC}$ ,  $CE = CG \Rightarrow 2CE = k_{ABC} \Rightarrow \underline{\underline{CE = \frac{k_{ABC}}{2} = s}} \Rightarrow \underline{\underline{CG = s}}$ .

**579.** Legyenek az  $a$  oldalt érintő hozzáírt kör érintési pontjai az  $AC, BC$  és  $AB$  oldalegyeneseken rendre  $D, E$  és  $F$ . Az 578. feladat állítása szerint  $AF = s$ .  $BF = AF - AB = s - c$ ,  $BF = BE$  miatt  $\underline{\underline{BE = s - c}}$ ,  $\underline{\underline{CE = BC - BE = a - (s - c) = s - b}}$ .

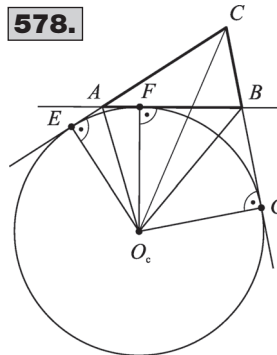
**580.** Az 577. feladat megoldásából  $BE = s - b$ . Az 579. feladat megoldásából  $CF = s - b$ . Tehát a két távolság valóban egyenlő.

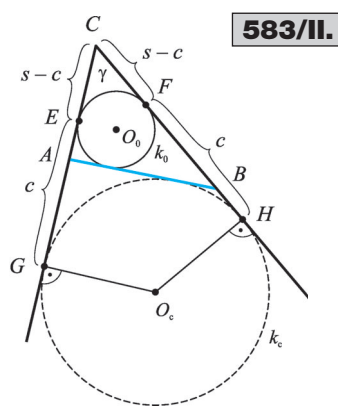
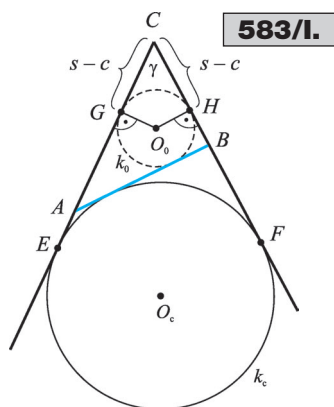
**581.** Legyen a  $c$  oldalon a beírt kör érintési pontja  $E$ , a hozzáírt kör érintési pontja  $F$ . **1. eset:** Ha  $a = b$ , akkor  $E \equiv F \Rightarrow EF = 0 = a - b$ . **2. eset:** Ha  $a \neq b$ , akkor  $a > b$  feltehető. Az 577. feladat megoldásából  $AE = s - a$ . Az 579. feladat megoldásából  $AF = s - b$ .  $a > b \Rightarrow AE = s - a < s - b = AF$ .  $\underline{\underline{EF = AF - AE = s - b - (s - a) = a - b}}$ .

577.



578.





**582.** Legyen a háromszög  $a$  oldalát érintő hozzáírt kör középpontja  $O_a$ , érintési pontja az  $AB$  oldalegyenesen pedig  $E$ . Az 578. feladat megoldásából  $AE = s \Rightarrow$  az  $AEO_a$  derékszögű háromszög befogói  $AE = s$  és  $O_aE = r_a \Rightarrow$  a háromszög megszerkeszthető,  $AEO_a \Delta$  hegyesszöge az  $AO_a$  szögfelező miatt  $\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha$ .

**583.** Az elhelyezendő szakasz egyenese el is választhatja a szögcsúcsot és a kört, de a kör és a szögcsúcs lehet az egyenes által határolt ugyanazon félsíkban is. **1. eset:** Az elhelyezendő szakasz a  $k_c$  kör és a  $C$  szögcsúcs között van. Olyan  $ABC \Delta$ -et kell szerkesztenünk, melynek adott a  $\gamma$  szöge, a  $c$  oldalához hozzáírt köre és a  $c$  oldal hossza. Az 578. feladat szerint  $CE = CF = s$ . Az 577. feladat szerint a háromszög beírt köre  $C$ -től  $(s - c)$  távolságra érinti az  $AC$  és  $BC$  oldalakat. Az  $s$  és  $c$  ismeretében ezeket az érintési pontokat kijelöljük, majd ezekben a pontokban merőlegest állítunk a szög száraira  $\rightarrow$  a merőlegesek metszéspontja a beírt kör középpontja  $\rightarrow k_0$  a beírt kör. A  $k_0$  és  $k_c$  közös belső érintőjének megszerkesztése  $\rightarrow AB$ . Nincs megoldás, ha  $c \geq s$  vagy  $k_0$  metszi  $k_c$ -t. Egy megoldás van, ha  $k_0$  érinti  $k_c$ -t. Két megoldás van, ha  $k_0$  kívül van  $k_c$ -n.

**2. eset:** Az elhelyezendő szakasz a  $k_0$  körnek a  $C$  szögcsúccsal ellentétes oldalán van. Olyan  $ABC \Delta$ -et kell szerkesztenünk, aminek adott a  $\gamma$  szöge, a beírt köre és a  $c$  oldal hossza. Az 577. feladat szerint  $CE = CF = s - c$ . Az 578. feladat szerint a háromszög  $c$  oldalhoz hozzáírt köre  $C$ -től  $s$  távolságra érinti az  $AC$  és  $BC$  oldalegyeneseket.  $E$ -ből és  $F$ -ből  $C$ -vel ellentétes oldalra felmérjük a szög szárakra a  $c$  távolságot  $\rightarrow$  a  $c$  oldalhoz hozzáírt kör  $G$  és  $H$  érintési pontjai.  $G$ -ben merőlegest állítunk  $GC$ -re,  $H$ -ban  $HC$ -re  $\rightarrow$  a merőlegesek metszéspontja  $O_0$ , a  $c$  oldalhoz hozzáírt kör középpontja.  $O_c$  középpontú  $O_cG$  sugarú kör  $k_c$ .  $k_0$  és  $k_c$  közös belső érintőjének a szög szárak közé eső darabja  $AB$ . Nincs megoldás, ha  $k_0$  metszi  $k_c$ -t. Egy megoldás van, ha  $k_0$  érinti  $k_c$ -t. Két megoldás van, ha  $k_0$  kívül van  $k_c$ -n. A két esetben adódó megoldások számát összesítve 0 vagy 1; 2; 3; 4 megoldás lehetséges.

**584.** Adott:  $r_0, r_c, a - b$ . Legyen az  $AB$  oldalon a beírt kör érintési pontja  $E$ , a  $k_c$  hozzáírt köré  $F$ . Felhasználjuk: az  $EF$  szakasz az  $(a - b)$  szakasszal egyenlő (581. feladat). A szerkesztés: ①  $EF = a - b$  szakasz felvétele. ②  $E$ -ben merőleges  $EF$ -re,  $F$ -ben merőleges  $EF$ -re. ③ a merőlegesekre  $r_0$ , ill.  $r_c$  szakaszok felmérése ellentétes félsíkban  $\rightarrow O_0, O_c$ . ④  $O_0$  középpontú  $r_0$  sugarú kör  $\rightarrow k_0$ .  $O_c$  középpontú  $r_c$  sugarú kör  $\rightarrow k_c$ . ⑤  $k_0$  és  $k_c$  körök közös külső érintőinek megszerkesztése. ⑥ Az érintők metszéspontja  $C$ , az érintőknek  $EF$  egyenessel való metszéspontjai  $A$  és  $B$ .  $r_0 \geq r_c$  esetében nincs megoldás, minden más esetben van.

**585.** Az 577. feladat megoldásából  $AE_1 = s - a$ . Az 578. feladat megoldásából  $AE_2 = s$ .  $\underline{\underline{E_1E_2 = AE_2 - AE_1 = s - (s - a) = a}}$ .

**586.** Legyen az  $AB$  átfogójú derékszögű háromszög  $BC$  oldalának egyenesén a beírt kör érin-

tési pontja  $E_1$ , az átfogót érintő hozzáírt kör érintési pontja  $E_2$ . Az  $O_0E_1C\Delta$  egyenlő szárú derékszögű, hiszen  $O_0CE_1\angle = 45^\circ \Rightarrow CE_1 = r_0 = s - c$  (l. 577. feladat).  $O_cE_2C\Delta$ -ben  $CE_2 = r_c = s$  (l. 578. feladat).  $r_c - r_0 = s - (s - c) = c$ .

**587.**  $CE_1O_0E_2$  négyszög minden szöge derékszög és  $CE_1 = CE_2 \Rightarrow CE_1O_0E_2$  négyzet  $\Rightarrow CE_1 = r_0$ .

Az 577. feladat megoldásából  $CE_1 = s - c \Rightarrow r_0 = s - c = \frac{a + b + c}{2} - c \Rightarrow 2r_0 + c = a + b$ .

**588.** Az 587. feladat megoldásából:  $a + b = 2r_0 + c \Rightarrow c = a + b - 2r_0 \Rightarrow$  Olyan derékszögű háromszöget kell szerkeszteni, amelyben ismert a befogók összege és az átfogó. Forgassuk el az  $A$  csücsöt  $C$  körül  $(-90^\circ)$ -kal  $\rightarrow A' \Rightarrow AA'C\Delta$  egyenlő szárú derékszögű  $\Rightarrow CA'A\angle = 45^\circ$ . A szerkesztés: ①  $A'B = a + b$  hosszúságú szakasz felvétele. ②  $A'$ -ben  $A'B$ -re  $45^\circ$ -os szög  $\rightarrow f$ . ③  $B$  középpontú  $c$  sugarú kör  $\rightarrow k_B$ . ④  $k_B \cap f = A$ . ⑤  $A$ -ból merőleges  $A'B$ -re  $\Rightarrow C$ . 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

**589.** A háromszög derékszögű csúcsa  $C$ -ben van.  $a)$  Legyen a beírt kör érintési pontja  $AC$ -n

$E$ .  $CE = r_0$ , másrészt az 577. feladat megoldásából  $CE = s - c \Rightarrow r_0 = s - c = \frac{a + b + c}{2} - c =$

$$= \frac{a + b - c}{2}.$$

$b)$  Legyen a  $k_c$  hozzáírt kör érintési pontja a  $CA$  egyenesen  $F$ .  $O_c$  rajta van a derékszög felezőjén, ezért  $O_cFC\Delta$  egyenlő szárú derékszögű  $\Rightarrow CF = r_c$ . Az 578. feladat megoldásából  $CF = s$ ,  $r_c = s = \frac{a + b + c}{2}$ .

**590.** Legyen a  $k_c$  hozzáírt kör érintési pontja a  $CB$ , ill.  $CA$  befogók egyenesén  $E_1$ , ill.  $E_2$ . Derékszögű háromszögben az  $O_cE_1CE_2$  négyszög négyzet, mert minden szöge derékszög és  $E_2O_c = O_cE_1 = r_c$ . A szerkesztés: ①  $r_c$  oldalú négyzet  $\rightarrow O_cE_1CE_2$  négyzet. ②  $O_c$  középpontú  $r_c$  sugarú kör  $\rightarrow k_c$ . ③  $E_2C$ -vel  $\alpha$  szöget bezáró tetszőleges  $e$  egyenes szerkesztése. ④  $e$ -vel párhuzamos,  $C$ -hez közelebbi érintő szerkesztése a  $k_c$  körhöz. ⑤ Az érintőnek a  $C$  csücsű derékszög száraival való metszéspontjai  $A$  és  $B$ . Egy megoldás van.

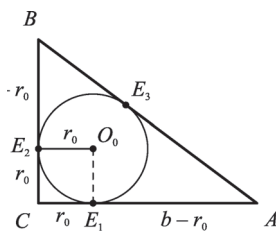
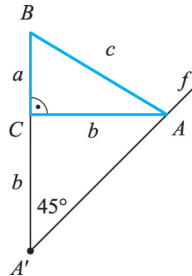
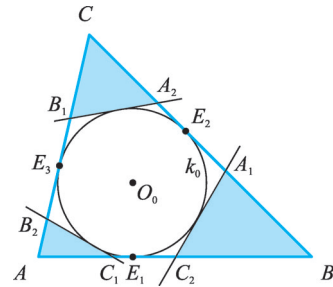
**591.** Legyen  $C$  a derékszögű csúcs, és a  $k_c$  hozzáírt kör érintési pontjai a befogók egyenesén  $E_1$  és  $E_2$ . Az 578. feladat megoldásából tudjuk, hogy  $CE_2 = s$ .  $E_1O_cE_2C$  négyszög  $r_c$  oldalú négyzet.

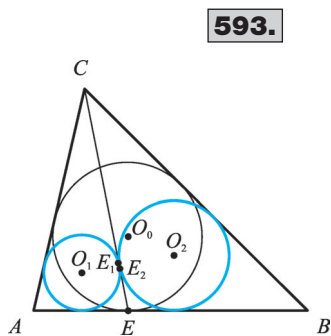
$CE_2 = r_c = s = \frac{a + b + c}{2} \Rightarrow c = 2r_c - (a + b)$ . Az adatokat behelyettesítve:  $c = 7$  cm.

**592.** Egy körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők.  $\Rightarrow A_2B_1 = A_2E_2 + B_1E_3$  és  $B_2C_1 = B_2E_3 + C_1E_1$  és  $C_2A_1 = C_2E_1 + A_1E_2 \Rightarrow k_{AC_1B_2} + k_{CB_1A_2} + k_{BA_1C_2} =$

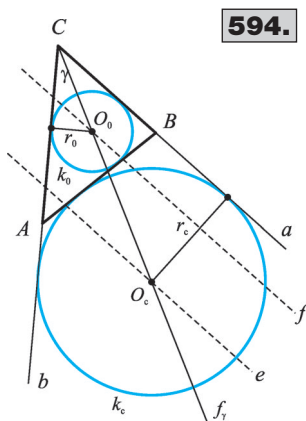
$$= (AC_1 + B_2E_3 + C_1E_1 + B_2A) + (CB_1 + A_2E_2 + B_1E_3 + CA_2) + (BA_1 + C_2E_1 + A_1E_2 + C_2B) =$$

$$= AB + BC + CA = k_{ABC}.$$

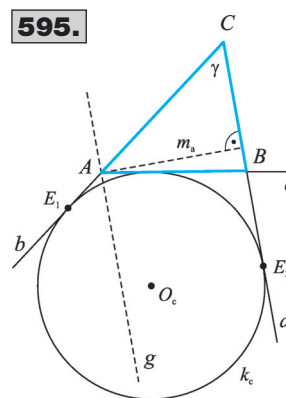
**587.****588.****592.**



593.



594.



595.

**593.** Az  $AEC\Delta$  oldalai:  $AC = b$ ;  $AE = s - a$ ;  $CE = x$ . Ebben a háromszögben a félkerület:  $s_1 = \frac{b + s - a + x}{2}$ . Az 577. feladat eredményét felhasználva  $EE_1 = s_1 - b = \frac{b + s - a + x}{2} - b = \frac{s + x - a - b}{2}$ . A  $BEC\Delta$  oldalai:  $BC = a$ ;  $BE = s - b$ ;  $CE = x$ . Ebben a háromszögben a félkerület:  $s_2 = \frac{a + s - b + x}{2}$ . Az 577. feladat eredményét felhasználva  $EE_2 = s_2 - a = \frac{a + s - b + x}{2} - a = \frac{s + x - a - b}{2}$ . Az aláhúzottak egyenlősége miatt  $E_1 \equiv E_2$ .

**594.** A szerkesztés: ①  $\gamma$  szög felvétele  $\rightarrow a$  és  $b$  félegyenes. ②  $\gamma$  szögfelezője  $f_\gamma$ . ③ párhuzamos  $a$ -tól  $r_c$  távolságra  $\rightarrow e$ . ④  $e \cap f_\gamma = O_c$ ,  $O_c$  középpontú  $r_c$  sugarú kör  $\rightarrow k_c$ . ⑤ párhuzamos  $a$ -tól  $r_0$  távolságra  $\rightarrow f$ . ⑥  $f \cap f_\gamma = O_0$ ,  $O_0$  középpontú  $r_0$  sugarú kör  $\rightarrow k_0$ . ⑦  $k_c$  és  $k_0$  közös belső érintőinek  $b$ -vel való metszéspontja  $A$ ,  $a$ -val való metszéspontja  $B$ . 0 vagy 1 egyenlő szárú vagy 2 egybevágó háromszög lehet.

**595.** Felhasználjuk az 578. feladat megoldását:  $CE_1 = CE_2 = s$ . A szerkesztés: ①  $\gamma$  szög felvétele  $\rightarrow a$  és  $b$  félegyenes;  $C$  csúcs. ②  $a$ -ra és  $b$ -re  $C$ -ből  $s = \frac{k_{ABC}}{2} \rightarrow E_1; E_2$ . ③  $E_1$ -ben merőleges  $b$ -re,  $E_2$ -ben merőleges  $a$ -ra; a merőlegesek metszéspontja  $O_c \rightarrow a$  oldalhoz hozzáírt kör  $k_c$ . ④  $a$ -val párhuzamos  $m_a$  távolságra a szögtartományban  $\rightarrow g$ . ⑤  $g \cap b = A$ . ⑥  $A$ -ból érintő  $k_c$ -hez  $\rightarrow e$ . ⑦  $e \cap a = B$ . 0 vagy 1 megoldás lehet.

**596.** Az 578. feladat megoldásából  $CE_1 = CE_2 = s$ , ahol  $E_1$  és  $E_2$  a  $k_c$  hozzáírt kör érintési pontjai a  $CA$  és  $CB$  egyeneseken. A szerkesztés: ①  $\gamma$  szög felvétele  $\rightarrow a$  és  $b$  félegyenes;  $C$  csúcs. ②  $r_0$  távolságra párhuzamos  $a$ -val és  $b$ -vel a szögtartományban; metszéspontjuk  $O_0 \rightarrow a$  beírt kör  $k_0$ . ③  $\gamma$  száraira  $s = \frac{k_{ABC}}{2}$  hosszú szakaszok felvétele  $\rightarrow E_1; E_2$ . ④  $E_1$ -ben merőleges  $b$ -re,  $E_2$ -ben merőleges  $a$ -ra; a merőlegesek metszéspontja  $O_c \rightarrow a$  oldalhoz hozzáírt kör  $k_c$ . ⑤  $k_c$  és  $k_0$  közös belső érintőjének megszerkesztése  $\rightarrow c$ . ⑥  $c \cap a = B$ ;  $c \cap b = A$ . 0 vagy 1 egyenlő szárú vagy 2 egybevágó háromszög lehet.

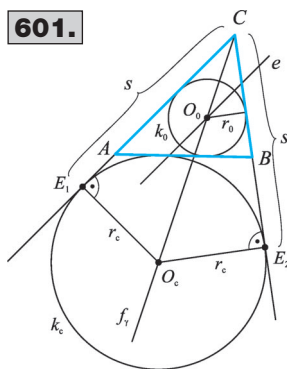
**597.** Felhasználjuk az 578. feladat megoldását:  $CE_1 = CE_2 = s$ , ahol  $E_1$  és  $E_2$  a  $k_c$  hozzáírt kör érintési pontjai a  $CA$  és  $CB$  egyeneseken. A szerkesztés: ①  $\gamma$  szög felvétele  $\rightarrow a$  és  $b$  félegyenes;

$C$  csúcs. ②  $a$ -ra és  $b$ -re  $C$ -ből  $s = \frac{k_{ABC}}{2} \rightarrow E_1; E_2$ . ③  $E_1$ -ben merőleges  $b$ -re,  $E_2$ -ben merőleges  $a$ -ra; a merőlegesek metszéspontja  $O_c \rightarrow a$  oldalhoz hozzáírt kör  $k_c$ . ④  $C$  középpontú  $m_c$  sugarú kör  $\rightarrow k$ . ⑤  $k$  és  $k_c$  közös belső érintőjének  $a$ -val való metszéspontja  $B$ ,  $b$ -vel való metszéspontja  $A$ . 0 vagy 1 egyenlő szárú vagy 2 egybevágó háromszög lehet.

**598.** A szerkesztés: ①  $E$ -ben merőleges  $AB$ -re, majd a merőlegesen  $r_0$  távolság kijelölése  $\rightarrow O_0$ . ②  $O_0$  középpontú  $r_0$  sugarú kör  $\rightarrow k_0$ . ③  $A$ -ból érintő  $k_0$ -hoz  $\rightarrow b$ .  $B$ -ből érintő  $k_0$ -hoz  $\rightarrow a$ . ④  $a \cap b = C$ . 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

**599.** Felhasználjuk az 577. feladat megoldásából  $AE = s - a$ , ahol  $E$  a beírt kör érintési pontja  $AB$ -n.  $c - (a - b) = c + b - a = c + b + a - 2a = 2(s - a)$ . A szerkesztés: ①  $\frac{c - (a - b)}{2} = s - a$  szakasz megszerkesztése. ②  $AB = c$  szakasz felvétele. ③  $AE = s - a$  szakasz kijelölése  $AB$ -n. ④  $E$ -ben merőleges  $AB$ -re; a merőlegesen  $E$ -től  $r_0$  távolságra  $O_0$  középpont kijelölése. ⑤  $O_0$  középpontú  $r_0$  sugarú kör  $\rightarrow k_0$ . ⑥  $A$ -ból,  $B$ -ből érintő  $k_0$ -hoz; az érintők metszéspontja  $C$ . 0 vagy 1 megoldás lehet.

**600.** Felhasználjuk az 578. feladat megoldását:  $CE_1 = CE_2 = s$ , ahol  $E_1$  és  $E_2$  a  $k_c$  hozzáírt kör érintési pontjai  $CA$  és  $CB$  egyeneseken. ①  $a$ -ra és  $b$ -re  $C$ -ből  $s = \frac{k_{ABC}}{2} \rightarrow E_1; E_2$ . ②  $E_1$ -ben

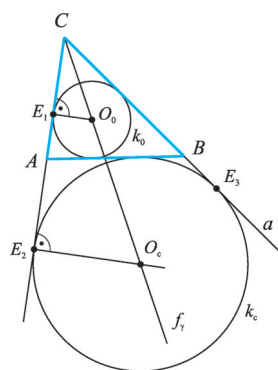


merőleges  $b$ -re,  $E_2$ -ben merőleges  $a$ -ra; a merőlegesek metszéspontja  $O_c \rightarrow a$  oldalhoz hozzáírt kör  $k_c$ . ③  $P$ -ből érintő szerkesztése  $k_c$ -hez. Az érintőnek  $a$ -val való metszéspontja  $B$ ,  $b$ -vel való metszéspontja  $A$ . 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

**601.** Felhasználjuk az 578. feladat megoldását:  $CE_1 = CE_2 = s$ .

A szerkesztés: ①  $s = \frac{k_{ABC}}{2}$  és  $r_c$  oldalú derékszögű deltoid  $\rightarrow CE_1O_cE_2$  négyszög;  $E_1CE_2 \sphericalangle = \gamma$ . ②  $E_1CE_2 \sphericalangle$  szögfelezője  $f_\gamma$ . ③  $r_0$  távolságra párhuzamos a  $CE_1$  szögszárral  $\rightarrow e$ . ④  $f_\gamma \cap e = O_0$ . ⑤  $O_0$  középpontú  $r_0$  sugarú kör  $\rightarrow k_0$ .  $O_c$  középpontú  $r_c$  sugarú kör  $\rightarrow k_c$ . ⑥  $k_c$  és  $k_0$  körök közös belső érintőjének a szög száraival való metszéspontjai  $A$  és  $B$ . 0 vagy 1 egyenlő szárú vagy 2 egybevágó megoldás lehet.

**603.**



**602.** Adott:  $k_{ABC}; r_c; \alpha$ . Felhasználjuk az 578. feladat megoldását:

$CE_1 = CE_2 = s = \frac{k_{ABC}}{2}$ , ahol  $E_1$  és  $E_2$  a  $k_c$  hozzáírt kör érintési pontjai a  $CA$  és  $CB$  egyeneseken. A szerkesztés: ①  $O_c$  középpontú,  $r_c$  sugarú kör:  $k_c$ . ②  $E_1 \in k_c$ . ③  $E_1$ -et  $O_c$  körül  $(-\alpha)$  szöggel elforgatjuk:  $C_c$ . ④  $C_c$ -ben merőleges  $O_cC_c$ -re:  $c$ . ⑤  $E_1$ -ben merőleges  $E_1O_c$ -re:  $b$ . ⑥  $c \cap b = A$ . ⑦  $E_1$  kezdőpontú,  $A$ -t tartalmazó félegyenesen  $C$  úgy, hogy  $E_1C = s$  legyen. ⑧  $C$  középpontú,  $s$  sugarú kör:  $k$ . ⑨  $k \cap k_c = E_2$ . ⑩  $CE_2 \cap c = B$ . Minden  $\alpha < 180^\circ$  szög esetén van megoldás.

**603.** Felhasználjuk: I. Az 577. feladat megoldásából  $CE_1 = s - c$ . II. Az 578. feladat megoldásából  $CE_2 = s$ . III.  $\frac{(a + b) - c}{2} = s - c$ .

A szerkesztés: ①  $(s - c); r_0; \triangle \rightarrow CE_1O_0\Delta$ . ②  $C$ -ből  $CE_1$  félegyenesre  $s$  távolság  $\rightarrow E_2$ . ③  $E_2$ -ben  $CE_2$ -re állított merőleges és  $CO_0$  egyenes metszéspontja  $O_c$ . ④  $O_0$  középpontú  $O_0E_1$  sugarú kör  $\rightarrow k_0$ ;  $O_c$  középpontú  $O_cE_2$  sugarú kör  $\rightarrow k_c$ . ⑤  $E_2$ -t tükrözzük a  $CO_c$  egyenesre  $\rightarrow E_3$ . ⑥  $k_0$  és  $k_c$  közös belső érintője  $\rightarrow c$ . ⑦  $c \cap e(C; E_1) = A$ ;  $c \cap e(C; E_3) = B$ . 0 vagy 1 egyenlő szárú vagy 2 egybevágó háromszög lehet.

## Háromszögek szerkesztése (II. rész)

**604.** Felhasználjuk: az  $m_a, m_b, m_c$  metsző egyenesek magasságvonalak, tehát merőlegesek a háromszög egy-egy oldalára. A szerkesztés: ①  $P$ -ből merőleges  $m_b$ -re  $\rightarrow b$ . ②  $b \cap m_a = A$ ,  $b \cap m_c = C$ . ③  $C$ -ből merőleges  $m_a$ -ra  $\rightarrow a$ . ④  $a \cap m_b = B$ . Nincs megoldás, ha  $b \parallel m_a$  vagy  $b \parallel m_c$ . Végtelen sok megoldás van, ha  $m_a \perp m_b$  és  $P \in m_a$ . Minden más esetben egy megoldás van.

**605.** a) A szerkesztés: ①  $\gamma$  szög felvétele  $\rightarrow C; a; b$ . ②  $a$ -val párhuzamos  $m_a$  távolságra  $\rightarrow e$ . ③  $e \cap b = A$ . ④  $C$  középpontú  $CA$  sugarú kör  $\rightarrow k_C$ . ⑤  $k_C \cap a = B$ . Bármely  $0^\circ < \gamma < 180^\circ$  esetén egyértelműen megoldható. b) A szerkesztés: ①  $m_a$  szakasz felvétele  $\rightarrow A; T$  pontok. ②  $T$ -ben merőleges  $AT$ -re  $\rightarrow a$ . ③  $A$  középpontú,  $c$  sugarú kör  $\rightarrow k_A$ . ④  $k_A \cap a = B$ . ⑤  $AB$  felező merőlegese  $f_{AB}$ . ⑥  $f_{AB} \cap a = C$ . Nincs megoldás, ha  $c \leq m_a$ . Minden más esetben két tengelyesen szimmetrikus megoldás van (a tengely az  $AT$  egyenes).

**606.** A szerkesztés: ①  $O$  középpontú  $R$  sugarú  $k$  kör, benne  $c$  hosszúságú húr  $\rightarrow A; B$ . ②  $m_c$  távolságra  $AB$ -vel párhuzamos egyenespár  $\rightarrow e_1; e_2$ . ③  $k \cap e_i = C_i$ . Nincs megoldás, ha  $c > 2R$  vagy  $k \cap e_i = \emptyset$ . Más esetekben 0; vagy egyetlen egyenlő szárú háromszög; vagy két egybevágó háromszög; két egybevágó és egy harmadik egyenlő szárú háromszög vagy két-két egybevágó háromszög lehet a megoldás.

**607.** A szerkesztés: ①  $O$  középpontú  $R$  sugarú  $k$  kör, benne  $c$  hosszú húr  $\rightarrow A; B$ . ②  $A$ -ban  $AB$  szárra  $\alpha$  szög felvétele  $\rightarrow b$  félegyenes. ③  $b \cap k = C$ . Nincs megoldás, ha  $c > 2r$  vagy  $b$  fél-egyenes  $A$ -ban érinti vagy elkerüli a kört. Minden más esetben egy megoldás van.

**608.** A szerkesztés: ①  $O$  középpontú  $R$  sugarú  $k$  kör, benne  $c$  hosszúságú húr  $\rightarrow A; B$ . ②  $AB$  felezéspontja  $F$ . ③  $F$  középpontú  $s_c$  sugarú kör  $\rightarrow k_F$ . ④  $k_F \cap k = C$ . Nincs megoldás, ha  $c > 2R$  vagy  $k_F \cap k = \emptyset$ . Minden más esetben vagy két egybevágó háromszög vagy egy egyenlő szárú háromszög lesz a megoldás.

**609.** Felhasználjuk: a Thalész-tétel miatt a szerkesztendő háromszög átfogója a köré írt kör átmérője. a) A szerkesztés: ①  $O$  középpontú  $R$  sugarú kör, benne  $AB$  átmérő. ②  $A$ -ban  $AB$  szárra  $\alpha$  szög felvétele  $\rightarrow b$  félegyenes. ③  $b \cap k = C$ . A feladat mindig egyértelműen megoldható. b) A szerkesztés: ①  $O$  középpontú  $R$  sugarú kör, benne  $AB$  átmérő. ②  $m_c$  távolságra párhuzamos  $AB$ -vel  $\Rightarrow e_1, e_2$ . ③  $e_i \cap k = C_i$ . 4 darab egybevágó megoldás van, ha  $m_c < R$ , 2 darab egybevágó egyenlő szárú megoldás van, ha  $m_c = R$ , nincs megoldás, ha  $m_c > R$ .

**610.** a) A szerkesztés: ①  $O$  középpontú  $R$  sugarú  $k$  kör, benne  $c$  hosszúságú húr  $\rightarrow A; B$ . ②  $AB$  felező merőlegese  $f_{AB}$ . ③  $f_{AB} \cap k = C_i$ . 0; 1 vagy két megoldás lehetséges. b) A szerkesztés: ①  $O$  középpontú  $R$  sugarú kör  $\rightarrow k$ . ②  $C \in k$  a kör tetszőleges pontja. ③  $C$  középpontú  $a$  sugarú kör  $\rightarrow k_C$ . ④  $k_C \cap k = \{A; B\}$ . Nincs megoldás, ha  $a \geq 2R$ , egy megoldás van, ha  $a < 2R$ . c) A szerkesztés: ①  $O$  középpontú  $R$  sugarú kör  $\rightarrow k$ . ②  $C \in k$  a kör tetszőleges pontja. ③  $CO$  egyenesre  $m_c$  szakasz felvétele  $\rightarrow F$ . ④  $F$ -ben merőleges  $CF$ -re  $\rightarrow c$ . ⑤  $c \cap k = \{A; B\}$ . Nincs megoldás, ha  $m_c \geq 2R$ , egy megoldás van, ha  $m_c < 2R$ . d) A szerkesztés: ①  $O$  középpontú  $R$  sugarú kör  $\rightarrow k$ . ②  $C \in k$  a kör tetszőleges pontja. ③  $CO$  átmérő egyenese. ④  $C$ -ben

$CO$ -ra  $\frac{\gamma}{2}$  és  $\left(-\frac{\gamma}{2}\right)$  szög felvétele  $\rightarrow a$  és  $b$  félegyenesek. ⑤  $b \cap k = A$ ,  $a \cap k = B$ .  $\gamma < 180^\circ$

esetén egyértelműen megoldható.